Sitzungsber. Abt. II (1997) 206: 3–14

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Orthogonalpolynome, die auf einem Intervall im Mittel und in den Randpunkten exakt approximieren

Von

P. A. Lesky und **H. Sonderegger**

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 23. Jänner 1997
durch das w. M. Leopold Vietoris)

Zum Gedenken an unseren Lehrer Wolfgang Gröbner

Zusammenfassung

Von W. Gröbner stammt ein Verfahren zur Konstruktion von Orthogonalpolynomen, das auf der Anwendung eines Variationsprinzips beruht. Dabei entsteht im allgemeinen ein Randwertproblem, dessen Randbedingungen die Sonderstellung der Randpunkte zu berücksichtigen gestatten. Nach Lösung des Randwertproblems ergeben sich die Orthogonalpolynome in der Gestalt einer *Rodriguesformel*. Das Verfahren ist bei entsprechender Änderung des Skalarproduktes in verschiedener Weise erweiterbar (Gewichtsfunktionen, höhere Ableitungen, unendliche Intervalle, weitere ausgezeichnete Punkte im Intervall).

1. Der Hilbertraum

Zugrundegelegt wird das Intervall (a, b) mit $a < b$. Die Funktionen f, deren Betrag auf (a, b) im Lebesgueschen Sinne quadratisch integrierbar ist und die in a und b einen (endlichen) Wert haben, liefern einen *linearen Vektorraum* über $\mathbb{C}$. Auf diesem Raum kann für je zwei Funktionen f und

g durch

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx + \alpha f(a)\,\overline{g(a)} + \beta f(b)\,\overline{g(b)} \tag{1.1}$$

ein *Skalarprodukt* erklärt werden ($\alpha, \beta \geqq 0$; Überstreichung bedeutet konjugiert komplex). In üblicher Weise erklärt man unter Verwendung des Skalarproduktes die *Norm* von f

$$\| f \| = \sqrt{(f, f)} \tag{1.2}$$

und den Abstand d von f und g

$$d(f,g) = \|f - g\| = \sqrt{(f-g, f-g)}. \tag{1.3}$$

Dieser Skalarproduktraum ist ein *Hilbertraum* H, dessen *Vollständigkeit* und *Separabilität* in [4] gezeigt wird.

Zwei Elemente f und g aus H heißen *orthogonal*, wenn

$$(f, g) = 0 \tag{1.4}$$

gilt. Bilden die Elemente $y_0, y_1, y_2, \ldots$ aus H ein *Orthogonalsystem*, dann hat man

$$(y_n, y_m) = \delta_{n,m}\,\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ \sigma_n & \text{für } m = n \end{cases} \tag{1.5}$$

mit dem *Kroneckersymbol* $\delta_{n,m}$ und dem *Normierungsfaktor* $\sigma_n (> 0)$. Ist dieses *Orthogonalsystem vollständig*, dann kann jedes Element f aus H durch dieses Orthogonalsystem so approximiert werden, daß

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b |f(x) - \sum_{k=0}^n c_k\, y_k(x)|^2 dx + \alpha |f(a) - \sum_{k=0}^n c_k\, y_k(a)|^2 + \beta\, |f(b) - \sum_{k=0}^n c_k\, y_k(b)|^2 \right] = 0 \tag{1.6}$$

gilt ($c_k \in \mathbb{C}$). Bei $\alpha, \beta > 0$ bedeutet das

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x) - \sum_{k=0}^n c_k\, y_k(x)|^2 dx = 0 \tag{1.7}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} |f(a) - \sum_{k=0}^n c_k\, y_k(a)|^2 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} |f(b) - \sum_{k=0}^n c_k\, y_k(b)|^2 = 0,$$

also die *Konvergenz im Mittel* von $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, y_k(x)$ auf (a, b) gegen $f(x)$ und die *Konvergenz* von $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, y_k(a)$ beziehungsweise $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, y_k(b)$ gegen $f(a)$ bzw. $f(b)$.

2. Das Gröbnerverfahren

Zugrundegelegt wird folgender
Satz: Das System von linear unabhängigen Funktionen $y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots$ aus H bildet genau dann ein *Orthogonalsystem*, wenn

$$\|y_n(x) + c_0\, y_0(x) + c_1\, y_1(x) + \cdots + c_{n-1}\, y_{n-1}(x)\|^2 \tag{2.1}$$

mit komplexen $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ für alle n aus $\mathbb{N}$ das Minimum bei $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$ erreicht ([1]).

In dieser Arbeit sollen Orthogonalsysteme von Polynomen mit *reellen* Koeffizienten konstruiert werden. Im Sinne des obigen Satzes ist unter allen Polynomen n-ten Grades

$$y_n(x) = c_{n,n}\, x^n + c_{n,n-1}\, x^{n-1} + \cdots + c_{n,0} \quad (c_{n,k} \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}) \tag{2.2}$$

mit *fest gewähltem* $c_{n,n} (\neq 0)$ dasjenige auszuwählen, für das $\|y_n(x)\|^2$ minimal wird. Somit kann das *Variationsproblem*

$$\|y_n(x)\|^2 = \min! \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.3}$$

mit der *Nebenbedingung*

$$y_n^{(n)}(x) = c_{n,n}\, n! \tag{2.4}$$

zugrundegelegt werden. In üblicher Weise geht man davon mit einem beliebig oft differenzierbaren *Lagrangefaktor* $\lambda_n(x)$ zum Problem

$$\int_a^b \{ y_n^2(x) + 2\lambda_n(x)[y_n^{(n)}(x) - c_{n,n}\, n!]\}\, dx + \alpha\, y_n^2(a) + \beta y_n^2(b) = \text{stat!} \tag{2.5}$$

über. Die $y_n(x)$ und $\lambda_n(x)$ sind jetzt so zu bestimmen, daß für alle n aus $\mathbb{N}$ ein stationärer Wert angenommen wird. Dazu ersetzt man $y_n(x)$ durch "Nachbarfunktionen" $y_n(x) + \varepsilon h_n(x)$, wobei die $h_n(x)$ ebenfalls beliebig oft differenzierbar sein sollen, und erhält

$$\begin{aligned}\Omega_n(\varepsilon) = &\int_a^b \{[y_n(x) + \varepsilon h_n(x)]^2 + 2\lambda_n(x)[y_n^{(n)}(x) + \varepsilon h_n^{(n)}(x) - c_{n,n}\, n!]\} dx \\ &+ \alpha[y_n(a) + \varepsilon\, h_n(a)]^2 + \beta[y_n(b) + \varepsilon\, h_n(b)]^2.\end{aligned}$$

Nun nimmt $\Omega_n(\varepsilon)$ genau dann für $\varepsilon = 0$ einen stationären Wert an, wenn die erste Variation $\delta\Omega = (\Omega_n'(\varepsilon))_{\varepsilon=0}$ null wird; das führt auf

$$\int_a^b [y_n(x)h_n(x) + \lambda_n(x)h_n^{(n)}(x)]\,dx + \alpha y_n(a)h_n(a) + \beta y_n(b)h_n(b) = 0.$$

Durch sukzessive partielle Integration wird das Integral so verändert, daß $h_n(x)$ ausgeklammert werden kann:

$$\int_a^b [y_n(x) + (-1)^n\lambda_n^{(n)}(x)]h_n(x)\,dx + [\lambda_n(x)h_n^{(n-1)}(x) - \lambda_n'(x)h_n^{(n-2)}(x) \\ + \cdots + (-1)^{n-1}\lambda_n^{(n-1)}(x)h_n(x)]_a^b + \alpha y_n(a)h_n(a) + \beta y_n(b)h_n(b) = 0. \tag{2.6}$$

Beschränkt man sich zunächst auf solche $h_n(x)$, für die $h_n(a) = h_n'(a) = \cdots = h_n^{(n-1)}(a) = h_n(b) = h_n'(b) = \cdots = h_n^{(n-1)}(b) = 0$ gilt, dann folgt aus dem Integral von (2.6) nach dem Lemma der Variationsrechnung ([3])

$$y_n(x) = (-1)^{n-1}\lambda_n^{(n)}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.7}$$

Setzt man im verbleibenden Teil von (2.6) $h_n(x) = (x-a)^{n-1}(x-b)^n$, so ergibt sich $\lambda_n(a) = 0$. Mit $h_n(x) = (x-a)^{n-2}(x-b)^n$ ergibt sich im nächsten Schritt $\lambda_n'(a) = 0$ usw. Mit $h_n(x) = (x-a)(x-b)^n$ entsteht schließlich $\lambda_n^{(n-2)} = 0$. Analog kann man mit dem Randpunkt $x = b$ vorgehen. Bei Verwendung von (2.7) zeigt sich, daß von (2.6) nur noch

$$[(-1)^{n-1}\lambda_n^{(n-1)}(x)h_n(x)]_a^b + \alpha(-1)^{n-1}\lambda_n^{(n)}(a)h_n(a) \\ + \beta(-1)^{n-1}\lambda_n^{(n)}(b)h_n(b) = 0$$

bleibt. Setzt man jetzt $h_n(x) = x - b$ bzw. $h_n(x) = x - a$, dann entstehen die weiteren Bedingungen

$$\lambda_n^{(n-1)}(a) - \alpha\lambda_n^{(n)}(a) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lambda_n^{(n-1)}(b) + \beta\lambda_n^{(n)}(b) = 0.$$

Wird $y_n(x)$ aus (2.7) n-mal differenziert und in (2.4) eingesetzt, so entsteht für $\lambda_n(x)$ die *Differentialgleichung* $2n$-ter Ordnung

$$\lambda_n^{(2n)}(x) = (-1)^{n-1}c_{n,n}\,n! \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2.8}$$

zu der aufgrund der soeben angestellten Überlegungen die *Randbedingungen*

$$\lambda_n(a) = \lambda_n'(a) = \cdots = \lambda_n^{(n-2)}(a) = 0, \quad \lambda_n^{(n-1)}(a) - \alpha\lambda_n^{(n)}(a) = 0, \\ \lambda_n(b) = \lambda_n'(b) = \cdots = \lambda_n^{(n-2)}(b) = 0, \quad \lambda_n^{(n-1)}(b) + \beta\lambda_n^{(n)}(b) = 0 \tag{2.9}$$

vorliegen. Mit den Lösungen dieses *Randwertproblems* für $\lambda_n(x)$ könnten die Orthogonalpolynome $y_n(x)$ in der *Rodriguesformel* (2.7) angegeben werden.

3. Orthogonalität

Aufgrund des Überganges von (2.3) mit (2.4) auf das Variationsproblem (2.5) ist es keineswegs gesichert, daß die mit (2.7) vorliegenden Polynome $y_n(x)$ tatsächlich ein Orthogonalsystem bilden. Die Orthogonalität dieser $y_n(x)$ läßt sich aber leicht direkt nachweisen. Dazu setzt man $y_n(x) = (-1)^{(n-1)}\lambda_n^{(n)}(x)$ in das Skalarprodukt $(y_n, y_m)(m \leqq n; n \in \mathbb{N})$ und erhält mit sukzessiver partieller Integration:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b y_n(x) y_m(x)\,dx + \alpha y_n(a) y_m(a) + \beta y_n(b) y_m(b) \\
&\quad = \int_a^b (-1)^{n-1}\lambda_n^{(n)}(x)\,y_m(x)\,dx + \alpha(-1)^{n-1}\lambda_n^{(n)}(a)\,y_m(a) \\
&\qquad + \beta(-1)^{n-1}\lambda_n^{(n)}(b)\,y_m(b) = [(-1)^{n-1}\lambda_n^{(n-1)}(x)\,y_m(x) \\
&\qquad + (-1)^{n-2}\lambda_n^{(n-2)}(x) y'_m(x) + \cdots + \lambda_n(x)\,y_m^{(n-1)}(x)]_a^b \\
&\qquad - \int_a^b \lambda_n(x)\,y_m^{(n)}(x)\,dx + (-1)^{n-1}[\alpha\lambda_n^{(n)}(a)\,y_m(a) + \beta\lambda_n^{(n)}(b)\,y_m(b)] \\
&\quad = (-1)^{n-1}\{[\alpha\lambda_n^{(n)}(a) - \lambda_n^{(n-1)}(a)]\,y_m(a) + [\beta\lambda_n^{(n)}(b) \\
&\qquad + \lambda_n^{(n-1)}(b)]\,y_m(b)\} - (-1)^{n-2}\lambda_n^{(n-2)}(a)\,y'_m(a) \\
&\qquad - \cdots - \lambda_n(a)\,y_m^{(n-1)}(a) + (-1)^{n-2}\lambda_n^{(n-2)}(b)\,y'_m(b) \\
&\qquad + \cdots + \lambda_n(b)\,y_m^{(n-1)}(b) - \int_a^b \lambda_n(x)\,y_m^{(n)}(x)\,dx. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Wegen der Randbedingungen (2.9) bleibt nur noch das letzte Integral übrig. Für $m > n$ ist die n-te Ableitung des Polynoms $y_m(x)$ vom m-ten Grad in x null, so daß die behauptete Orthogonalität vorliegt. Für $m = n$ kann (3.1) zur Berechnung der Normierungsfaktoren herangezogen werden.

4. Lösung des Randwertproblems

Über den Ansatz

$$
\lambda_n(x) = (x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}(x^2 - u_n x + v_n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (4.1)
$$

kann das Randwertproblem (2.8) mit (2.9) im allgemeinen bis auf einen konstanten Faktor eindeutig gelöst werden. Man findet

$$u_n = a + b + \frac{n(b-a)^2(\beta-\alpha)}{(b-a+n^2\alpha)(b-a+n^2\beta)-n^2\alpha\beta};$$

$$v_n = ab + \frac{n(b-a)^2[a\beta - b\alpha - \alpha\beta n(n+1)]}{(b-a+n^2\alpha)(b-a+n^2\beta)-n^2\alpha\beta}.$$

Zweckmäßigerweise setzt man

$$\gamma_n = (b-a+n^2\alpha)(b-a+n^2\beta) - n^2\alpha\beta \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4.2}$$

wobei die (eindeutige) Bestimmung des u_n und v_n wegen $\gamma_n > 0$ immer gelingt. Damit ergibt sich

$$\lambda_n(x) = [(x-a)(x-b)]^n + [(x-a)(x-b)]^{n-1}(a_n x + b_n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4.3}$$

$$a_n = \frac{n(b-a)^2(\alpha-\beta)}{\gamma_n}, \quad b_n = \frac{n(b-a)^2}{\gamma_n}[a\beta - b\alpha - \alpha\beta n(n+1)]. \tag{4.4}$$

5. Berechnung der Normierungsfaktoren

Der Integraltafel ([2], 121/12) entnimmt man

$$\int_a^b x^m (x-a)^n (x-b)^p dx = \frac{(-1)^p m! (b-a)^{n+p+1}}{(m+n+p+1)!} \sum_{k=0}^{m} \frac{(n+k)!(m+p-k)!}{k!(m-k)!} a^{m-k} b^k$$

für $m, n, p = 0, 1, 2, \ldots$, womit das in (3.1) auftretende Integral berechnet werden kann. Dafür ergibt sich

$$\int_a^b \lambda_n(x)\, dx = \frac{(-1)^n n!\, n!\, (b-a)^{2n+1} \gamma_{n+1}}{(2n+1)!\, \gamma_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wegen (2.7) und (2.8) hat man $y_n^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\lambda_n^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(2n)! = n!\, c_{n,n}$, so daß sich für (3.1)

$$\int_a^b y_n(x) y_m(x)\, dx + \alpha y_n(a) y_m(a) + \beta y_n(b) y_m(b) = \frac{n!\, n!\, (b-a)^{2n+1} \gamma_{n+1}}{(2n+1)\gamma_n} \delta_{n,m} \tag{5.1}$$

$(n, m = 1, 2, 3, \ldots)$ ergibt. Dabei liegt der Spitzenkoeffizient der Orthogonalpolynome durch

$$c_{n,n} = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5.2}$$

fest. Für die entsprechenden *monischen* Polynome (Spitzenkoeffizient eins) entstehen die *Orthogonalitätsrelationen*

$$\begin{aligned}&\int_a^b y_n^{(\mathrm{mon})}(x)\, y_m^{(\mathrm{mon})}(x)\, dx + \alpha\, y_n^{(\mathrm{mon})}(a)\, y_m^{(\mathrm{mon})}(a) + \beta\, y_n^{(\mathrm{mon})}(b)\, y_m^{(\mathrm{mon})}(b) \\ &\quad = \frac{(n!)^4 (b-a)^{2n+1} \gamma_{n+1}}{(2n)!(2n+1)!\gamma_n} \delta_{n,m} = \sigma_n \delta_{n,m} \quad (n, m = 1, 2, 3, \ldots).\end{aligned} \tag{5.3}$$

Der Normierungsfaktor σ_0 muß noch direkt berechnet werden: Mit $y_0^{(\mathrm{mon})}(x) = 1$ erhält man

$$\sigma_0 = b - a + \alpha + \beta. \tag{5.4}$$

Dieses σ_0 paßt zu den Normierungsfaktoren aus (5.3), wenn $\gamma_0 = (b-a)^2$ gesetzt wird. Die Orthogonalität der Polynome $y_n^{\mathrm{mon}}(x)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ zu $y_0^{(\mathrm{mon})}(x)$ folgt bereits aus (3.1).

6. Konvergenzverhalten in den Randpunkten

Für die $\lambda_n(x)$ aus (4.3) ergibt sich

$$\lambda_n^{(n)}(a) = \frac{n!(b-a)^{n+1}}{\gamma_n}[b - a + \beta n(n+1)],$$
$$\lambda_n^{(n)}(b) = \frac{n!(b-a)^{n+1}}{\gamma_n}[b - a + \alpha n(n+1)]$$

und somit für die nach (5.1) gebildeteten *normierten* Polynome $y_n^*(x)$

$$y_n^*(a) = (-1)^{n-1}\sqrt{\frac{(2n+1)(b-a)}{\gamma_n \gamma_{n+1}}}[b - a + \beta n(n+1)],$$

$$y_n^*(b) = (-1)^{n-1}\sqrt{\frac{(2n+1)(b-a)}{\gamma_n \gamma_{n+1}}}[b - a + \alpha n(n+1)].$$

Man kann jetzt $y_n^{*2}(a)$ so aufspalten, daß bei der Summierung über n gegenseitiges Aufheben eintritt:

$$y_n^{*2}(a) = \frac{(2n+1)(b-a)}{\gamma_n \gamma_{n+1}} \left[b - a + \beta n(n+1)\right]^2$$
$$= \frac{b-a}{\alpha}\left[\frac{b-a+\beta n^2}{\gamma_n} - \frac{b-a+\beta(n+1)^2}{\gamma_{n+1}}\right]$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Wird dazu noch $y_0^{*2}(a) = \frac{1}{b-a+\alpha+\beta}$ genommen, so ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{N} y_n^{*2}(a) = \frac{1}{b-a+\alpha+\beta}$$
$$+ \frac{b-a}{\alpha}\left\{\frac{b-a+\beta}{(b-a)(b-a+\alpha+\beta)}\right.$$
$$\left. - \frac{b-a+\beta(N+1)^2}{[b-a+(N+1)^2\alpha][b-a+(N+1)^2\beta] - (N+1)^2\alpha\beta}\right\},$$

und für $N \to \infty$ entsteht daraus

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n^{*2}(a) = \frac{1}{b-a+\alpha+\beta}\left[1 + \frac{b-a+\beta}{\alpha}\right] = \frac{1}{\alpha}. \tag{6.1}$$

Analog findet man

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n^{*2}(b) = \frac{1}{\beta}. \tag{6.2}$$

Diese Ergebnisse lassen sich mit der Approximation der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = a \text{ und } x = b \\ 0 & \text{für } x \in (a, b) \end{cases}$$

durch die Orthogonalpolynome $y_n^*(x)$ in der aus (1.1) hervorgehenden Norm in Zusammenhang bringen.

7. Explizite Gestalt der Orthogonalpolynome

Aus der Rodriguesformel (2.7) können die Polynome $y_n(x)$ durch Differentiation von $\lambda_n(x)$ gewonnen werden. Dazu berechnet man

$$\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)(x-b)]^n = \frac{d^n}{dx^n}\left\{\left[x^n - \binom{n}{1}ax^{n-1} + \cdots + (-1)^n a^n\right]\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left[x^n - \binom{n}{1}bx^{n-1} + \cdots + (-1)^n b^n\right]\right\}$$
$$= n!\left\{\binom{2n}{n}x^n - \binom{2n-1}{n}\binom{n}{1}(a+b)x^{n-1}\right.$$
$$+ \cdots + (-1)^k\binom{2n-k}{n}\left[\binom{n}{k}a^k + \binom{n}{k-1}\binom{n}{1}a^{k-1}b\right.$$
$$\left. + \cdots + \binom{n}{k}b^k\right]x^{n-k} + \cdots + (-1)^n\left[a^n + \binom{n}{n-1}\binom{n}{1}a^{n-1}b\right.$$
$$\left.\left. + \cdots + b^n\right]\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und

$$\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^{n-1}] = n!\left\{\binom{2n-1}{n}x^{n-1}\right.$$
$$-\binom{2n-2}{n}[na + (n-1)b]x^{n-2} + \cdots + (-1)^k\binom{2n-k-1}{n}\cdot$$
$$\cdot\left[\binom{n}{k}a^k + \binom{n}{k-1}\binom{n-1}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{n-1}{k}b^k\right]x^{n-k-1}$$
$$\left. + \cdots + (-1)^{n-1}\left[\binom{n}{n-1}a^{n-1} + \binom{n}{n-2}\binom{n-1}{1}a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}\right]\right\}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Für die in der ersten Gleichung auftretenden Summanden wird folgende Abkürzung eingeführt:

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{k-j}\binom{n}{j}a^{k-j}b^j = c(n,k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{7.1}$$

Mit den Abkürzungen a_n und b_n aus (4.4) berechnet man ferner

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^n(x-b)^{n-1}\right]\right\}a_n+\left\{\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)(x-b)\right]^{n-1}\right\}(b_n+aa_n)\\
&\quad=n!\left\{\binom{2n-1}{n}x^{n-1}a_n-\binom{2n-2}{n}x^{n-2}[(n-1)(a+b)a_n-b_n]\right.\\
&\qquad+\cdots-(-1)^k\binom{2n-k}{n}x^{n-k}\left\{\left[\binom{n-1}{k-1}a^{k-1}\right.\right.\\
&\qquad\left.+\binom{n-1}{k-2}\binom{n-1}{1}a^{k-2}b+\cdots+\binom{n-1}{k-1}b^{n-1}\right]a_n\\
&\qquad-\left[\binom{n-1}{k-2}a^{k-2}+\binom{n-1}{k-3}\binom{n-1}{1}a^{k-3}b\right.\\
&\qquad\left.\left.+\cdots+\binom{n-1}{k-2}b^{k-2}\right]b_n\right\}\\
&\qquad+\cdots-(-1)^n\left\{\left[a^{n-1}+\binom{n-1}{n-2}\binom{n-1}{1}a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}\right]a_n\right.\\
&\qquad-\left[\binom{n-1}{n-2}a^{n-2}+\binom{n-1}{n-3}\binom{n-1}{1}a^{n-3}b\right.\\
&\qquad\left.\left.\left.+\cdots+\binom{n-1}{n-2}b^{n-2}\right]b_n\right\}\right\},
\end{aligned}
$$

so daß für die n-te Ableitung von $\lambda_n(x)$ folgende Form entsteht:

$$
\begin{aligned}
\lambda_n^{(n)}(x)=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}x^{n-k}[c(n,k)-c(n-1,k-1)a_n\\
+c(n-1,k-2)b_n]; \qquad (7.2)
\end{aligned}
$$

darin sind $c(n-1,-1)=c(n-1,-2)=0$ zu setzen. Für die *monischen* Orthogonalpolynome ergibt sich dann mit den a_n und b_n aus (4.4) und den $c(n,k)$ aus (7.1)

$$
\begin{aligned}
y_n^{(\mathrm{mon})}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}}x^{n-k}[c(n,k)-c(n-1,k-1)a_n\\
+c(n-1,k-2)b_n] \qquad (7.3)
\end{aligned}
$$

für $n=1,2,3,\ldots$; dazu kommt noch $y_0^{(\mathrm{mon})}=1$. Bei $\alpha=\beta=0$ gehen aus (7.3) die monischen *Legendrepolynome* auf (a,b) hervor.

8. Dreigliedrige Rekursion für die monischen Orthogonalpolynome

In üblicher Weise erhält man unter Ausnützung der Orthogonalität neben

$$y_0^{(\mathrm{mon})}(x) = 1 \quad \text{und} \quad y_1^{(\mathrm{mon})}(x) = x - \frac{1}{2}\left[a + b - \frac{(b-a)^2(\alpha-\beta)}{\gamma_1}\right]$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die *dreigliedrige Rekursion*

$$y_{n+1}^{(\mathrm{mon})}(x) = (x - c_n)\, y_n^{(\mathrm{mon})}(x) - d_n\, y_{n-1}^{(\mathrm{mon})}(x), \tag{8.1}$$

wobei $c_n = c_{n,n-1} - c_{n+1,n}$ mit den Koeffizienten aus (2.2) $(c_{n,n} = 1)$ und $d_n = \sigma_n/\sigma_{n-1}$ bedeuten. Aus (7.3) geht

$$c_{n,n-1} = \tfrac{1}{2}\left[a_n - n(a+b)\right] \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

hervor, womit für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$c_n = \frac{1}{2}\left[a + b + a_n - a_{n+1}\right] = \frac{1}{2}\left[a + b + (b-a)^2(\alpha-\beta)\left(\frac{n}{\gamma_n} - \frac{n+1}{\gamma_{n+1}}\right)\right] \tag{8.2}$$

entsteht. Mit Hilfe der Normierungsfaktoren aus (5.3) und (5.4) ergibt sich

$$d_n = \frac{n^2(b-a)^2\gamma_{n+1}\gamma_{n-1}}{4(4n^2-1)\gamma_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{8.3}$$

so daß die dreigliedrige Rekursion folgende Form erhält:

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(\mathrm{mon})}(x) = {} & \left\{x - \frac{1}{2}\left[a + b + (b-a)^2(\alpha-\beta)\left(\frac{n}{\gamma_n} - \frac{n+1}{\gamma_{n+1}}\right)\right]\right\} y_n^{(\mathrm{mon})}(x) \\ & - \frac{n^2(b-a)^2\,\gamma_{n+1}\,\gamma_{n-1}}{4(4n^2-1)\,\gamma_n^2}\, y_{n-1}^{(\mathrm{mon})}(x) \end{aligned} \tag{8.4}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots;\ \gamma_n = (b - a + n^2\alpha)(b - a + n^2\beta) - n^2\alpha\beta$ für $n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Neben $y_0^{(\mathrm{mon})}(x)$ und $y_1^{(\mathrm{mon})}(x)$ werden noch die nächsten beiden Polynome angegeben:

$$\begin{aligned} y_2^{(\mathrm{mon})}(x) = {} & x^2 - \left[a + b - \frac{(b-a)^2(\alpha-\beta)}{\gamma_2}\right] x \\ & + \frac{1}{6}\left\{a^2 + 4\,ab + b^2 + \frac{2(b-a)^2}{\gamma_2}\left[a(2\beta-\alpha) + b(\beta-2\alpha) - 6\alpha\beta\right]\right\}; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_3^{(\mathrm{mon})}(x) &= x^3 - \frac{3}{2}\left[a+b-\frac{(b-a)^2(\alpha-\beta)}{\gamma_3}\right]x^2 \\
&\quad + \frac{3}{5}\left\{a^2+3ab+b^2+\frac{(b-a)^2}{\gamma_3}[a(3\beta-2\alpha)+b(2\beta-3\alpha)\right. \\
&\quad \left. - 12\alpha\beta]\right\}x - \frac{1}{20}\left\{a^3+9a^2b+9ab^2+b^3-\frac{3(b-a)^2}{\gamma_3}[a^2(3\beta-\alpha)\right. \\
&\quad \left. + 6ab(\beta-\alpha)+b^2(\beta-3\alpha)-24(a+b)\alpha\beta]\right\}.
\end{aligned}
$$

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß aufgrund der Orthogonalität im Hilbertraum (positiv definite Orthogonalität) der erste Nullstellensatz (lauter einfache Nullstellen in (a, b)) gilt. Über die dreigliedrige Rekursionsformel kann die Formel von Christoffel Darboux gewonnen werden, die ihrerseits den Beweis des zweiten Nullstellensatzes (Trennungssatzes) gestattet.

9. Ausgezeichnete Punkte im Inneren des Intervalles

Die Sonderstellung solcher Punkte kann nicht mehr mit Hilfe von Randbedingungen des Randwertproblems berücksichtigt werden. Allerdings bleibt für die gesuchten Polynome $y_n(x)$ aus (2.2) die Aussage

$$\| y_n^2(x) \| = \min! \quad (c_{n,n} \text{ fest}, n \in \mathbb{N}) \tag{9.1}$$

im entsprechend abgeändertem Hilbertraum, der ebenfalls vollständig und separabel ist ([4]), bestehen. Die Minimalforderung (9.1) liefert ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $c_{n,k}(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ der Polynome $y_n(x)$. Damit kann zwar aus dem Orthogonalsystem das Polynom $y_n(x)$ von n-ten Grad in x direkt bestimmt werden (eine schrittweise Orthogonalisierung wird nicht benötigt), aber die Orthogonalpolynome entstehen nicht mehr in Gestalt einer Rodriguesformel.

Literatur

[1] Gröbner, W. Über die Konstruktion orthogonaler Polynome in ein- und zweidimensionalen Bereichen. Mh. Math. **52**, 38–54 (1948).
[2] Gröbner, W., Hofreiter, W. Integraltafel II, Springer 1958.
[3] Gröbner, W., Lesky, P. Mathematische Methoden der Physik I, BI 89, Mannheim 1964.
[4] Sonderegger, H. Orthogonale Polynome, deren Fourierreihen in einzelnen bestimmten Punkten gegen den vorgegebenen Wert einer Funktion $f(x)$ streben und im restlichen Intervall im Mittel gegen $f(x)$ konvergieren. Dissertation Innsbruck, 1965.

Anschriften der Verfasser: Univ. Prof. Dr. Peter A. Lesky, Math. Institut A der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 57, D-70550 Stuttgart; Prof. Dr. Helmut Sonderegger, Pädagogische Akademie Postfach 42, A-6807 Feldkirch.