Sitzungsber. Abt. II (1997) 206: 241–251

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Über eine Konstruktion gleichverteilter Folgen auf Sphären, in der Drehgruppe und in der unitären Gruppe

Von

E. Hlawka

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 19. Juni 1997
durch das w. M. Edmund Hlawka)

Einleitung*

Es liege die n-dimensionale Sphäre

$$S^n : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1 \tag{1}$$

vor und wir wollen die Aufgabe behandeln, auf S^n gleichverteilte Folgen möglichst elementar zu bestimmen.

Ich unterscheide zwei Fälle:

I: $n = 2m$. Dann wähle ich folgende Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{1 - v_1^2}\,\cos 2\pi\phi_1\\
x_2 &= \sqrt{1 - v_1^2}\,\sin 2\pi\phi_1\\
x_3 &= v_1\sqrt{1 - v_2^2}\,\cos 2\pi\phi_2\\
x_4 &= v_1\sqrt{1 - v_2^2}\,\sin 2\pi\phi_2\\
&\vdots\\
x_{2m-1} &= v_1 \cdots v_{m-1}\sqrt{1 - v_m^2}\,\cos 2\pi\phi_m\\
x_{2m} &= v_1 \cdots v_{m-1}\sqrt{1 - v_m^2}\,\sin 2\pi\phi_m\\
x_{2m+1} &= v_1 \cdots v_{m-1} v_m
\end{aligned}$$

* Diese Resultate wurden Prof. P. J. Davis (Brown University) in einen Brief vom 4.4.1990 mitgeteilt.

wobei

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1^{\frac{1}{2m-1}} \\ v_2 &= w_2^{\frac{1}{2m-3}} \\ &\vdots \\ v_{m-1} &= w_{m-1}^{\frac{1}{3}} \\ v_m &= 1 - 2u \end{aligned} \tag{2}$$

ist. Es ist stets $0 \leq w_j < 1, 0 \leq u < 1, 0 \leq \phi_j < 1$ für alle j. Der Punkt $[0, \ldots, 0, -1]$ wird durch (2) und (3) nicht dargestellt.

Das Oberflächenelement von S^n wird

$$do = 2(2\pi)^m v_1^{2m-2} v_2^{2m-4} \cdots v_{m-1}^2 dv_1 \cdots dv_{m-1} du d\phi_1 \cdots d\phi_m,$$

also

$$do = \frac{2(2\pi)^m}{(2m-1)(2m-3)\cdots 3} dw_1 \cdots dw_{m-1} du d\phi_1 \cdots d\phi_m. \tag{3}$$

Für $m = 1$ erhalten wir

$$do = 4\pi du d\phi \tag{4'}$$

und die Parameterdarstellung lautet

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{1 - (1 - 2u)^2} \cos 2\pi\phi \\ x_2 &= \sqrt{1 - (1 - 2u)^2} \sin 2\pi\phi \\ x_3 &= 1 - 2u \qquad (0 \leq u < 1, 0 \leq \phi < 1). \end{aligned} \tag{3'}$$

Wählt man eine gleichverteilte Folge in E^2 modulo 1

$$\left(u^{(k)}, \phi^{(k)}\right) \quad k = 1, \ldots, N \tag{4}$$

mit Diskrepanz $D_N \to 0$, so erhält man eine Folge

$$\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right)$$

auf S^2, welche gleichverteilt ist.

Für jede Lipschitzfunktion F auf S^2 wird

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} F(x_1, x_2, x_3)do + \text{Rest}, \tag{5}$$

wo

$$|\text{Rest}| \leq KD_N^{\frac{1}{3}}\alpha(F) \tag{6}$$

(α Lipschitzkonstante von F) ist.

Im allgemeinen Fall nimmt man eine gleichverteilte Folge in E^m modulo 1

$$(w_1^{(k)}, \ldots, w_{m-1}^{(k)}, u^{(k)}, \phi_1^{(k)}, \ldots, \phi_m^{(k)}) \quad (k = 1, \ldots, N). \tag{5'}$$

Ist die Diskrepanz dieser Folge D_N, so erhält man für eine Lipschitzfunktion F auf S^n

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F(x_1^{(k)}, \ldots, x_{2m+1}^{(k)}) = \frac{1}{O(S^n)}\int_{S^n} F do + \text{Rest}, \tag{6}$$

wo

$$|\text{Rest}| \leq \text{KD}^{\frac{1}{2m+1}} N\alpha(\text{F}) \tag{7'}$$

ist (K Konstante).

Den Fall (3′) habe ich in der Arbeit *Über eine Klasse gleichverteilter Folgen* in den Acta Arithmetica behandelt. Dort habe ich eine spezielle Folge (5) gewählt, welche mit der Folge pythagoräischer Tripel zusammenhängt. Im Fall (5′) gibt es ein Analogon.

Der Fall II: n ungerade, $n = 2m + 1$, ist einfacher. Hier wählen wir die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{1 - v_1^2}\cos 2\pi\phi_1 \\
x_2 &= \sqrt{1 - v_1^2}\sin 2\pi\phi_1 \\
x_3 &= v_1\sqrt{1 - v_2^2}\cos 2\pi\phi_2 \\
x_4 &= v_1\sqrt{1 - v_2^2}\sin 2\pi\phi_2 \\
&\vdots \\
x_{2m+1} &= v_1 \cdots v_m \cos 2\pi\phi_{m+1} \\
x_{2m+2} &= v_1 \cdots v_m \sin 2\pi\phi_{m+1}
\end{aligned} \tag{8}$$

wobei

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1^{\frac{1}{2m}} \\ v_2 &= w_2^{\frac{1}{2(m-1)}} \\ &\vdots \\ v_m &= w_m^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{9}$$

ist. Dabei gelte $0 \leq v_j < 1, 0 \leq \phi_j < 1$ für alle j.

Es wird

$$do = (2\pi)^{m+1} v_1^{2m-1} v_2^{2m-3} \cdots v_m dv_1 \cdots dv_m d\phi_1 \cdots d\phi_{m+1}$$

also

$$do = \frac{(2\pi)^{m+1}}{(2m)(2m-2)\cdots 2} dw_1 \cdots dw_m d\phi_1 \cdots d\phi_{m+1}. \tag{10}$$

Also für $n = 3$, d.h. $m = 1$

$$do = 2\pi^2 dw_1 d\phi_1 d\phi_2.$$

Jetzt wählen wir eine gleichverteilte Folge aus E^{2m+1} modulo 1

$$w_1^{(k)}, \ldots, w_m^{(k)}, \phi_1^{(k)}, \ldots, \phi_{m+1}^{(k)}) \quad 1 \leq k \leq N \tag{11}$$

mit Diskrepanz D_N. Wir erhalten für die zugehörige Folge

$$(x_1^{(k)}, \ldots, x_{2m+2}^{(k)})$$

ein analoges Resultat wie in (7′). Nur der Exponent von D_N ist jetzt $\frac{1}{2m+2}$.

Es erscheint zunächst merkwürdig, daß der Fall der Sphäre auf den Fall des Torus E^m (mod 1), bzw. E^{m+1} (mod 1) zurückgeführt werden kann. Dies liegt aber nur daran, daß auf der Sphäre durch die Parameterdarstellungen (3) bzw. (8) nicht alle Punkte erfaßt werden. Die nicht erfaßten Punkte machen im Mittel nichts aus.

Man kann mit diesen Formeln auch gleichverteilte Folgen auf Produkten von Sphären erhalten, indem man gleichverteilte Folgen auf den Produkten der zugehörigen Tori E^m (mod 1) bzw. E^{m+1} (mod 1) betrachtet, d.h. z.B. für den Fall $S^2 \times S^2 \times \cdots \times S^2$ (r-mal) gleichverteilte Folgen auf E^{2r} (mod 1) betrachtet. Ist D_N die Diskrepanz der Folge auf E^{2r}, so wird die Lipschitzdiskrepanz der Folge auf $S^2 \times S^2 \times \cdots \times S^2$ (r-mal) $\leq D_N^{\frac{1}{3(r+1)}}$. Dies gestattet Anwendungen z.B. auf random flight in R^3, Potentialtheorie, usw.

§1

Wir wollen nun diese Formeln beweisen und dazu dient folgender Hilfssatz: Für

$$\begin{gathered} U=\sqrt{AB} \quad 0\le B<1 \quad \text{und} \\ V=\sqrt{A(1-B)} \quad \text{gilt} \\ (dU)^2+(dV)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{(dA)^2}{A}+A\,\frac{(dB)^2}{(1-B)B}\right) \end{gathered} \tag{12}$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} dU &= d(\sqrt{AB})=\sqrt{B}d(\sqrt{A})+\sqrt{A}\,d(\sqrt{B}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{B}\frac{dA}{\sqrt{A}}+\sqrt{A}\,\frac{dB}{\sqrt{B}}\right), \\ dV &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-B}\frac{dA}{\sqrt{A}}-\sqrt{A}\,\frac{dB}{\sqrt{1-B}}\right), \\ (dU)^2+(dV)^2 &= \frac{1}{4}\left(B\frac{(dA)^2}{A}+A\,\frac{(dB)^2}{B}+2dA\,dB\right. \\ &\qquad \left.+(1-B)\,\frac{(dA)^2}{A}+A\,\frac{(dB)^2}{1-B}-2dA\,dB\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{(dA)^2}{A}+A\,\frac{(dB)^2}{B(1-B)}\right). \end{aligned}$$

Wenn man

$$\begin{gathered} A=C^2 \quad B=D^2 \\ U=CD \quad V=C\sqrt{1-D^2} \end{gathered}$$

setzt, so liefert das

$$(dU)^2+(dV)^2=(dC)^2+C^2\,\frac{(dD)^2}{1-D^2} \tag{13}$$

Dies kann auch leicht direkt bewiesen werden und gestattet eine einfache Deutung, wenn man $C=\cos\alpha$ und $D=\cos\beta$ setzt.

Wir behandeln jetzt zuerst den Fall der Sphäre S^{2m+1}, also ausgeschrieben

$$x_1^2+\cdots+x_{2m+2}^2=1.$$

Setzen wir

$$z_1 = x_1 + ix_2, \ldots, z_{m+1} = x_{2m+1} + ix_{2m+2},$$

so können wir kurz schreiben

$$|z_1|^2 + \cdots + |z_{m+1}^2| = 1.$$

Wir setzen

$$z_k = r_k e^{i\psi_k} \quad k = 1, \ldots, m+1,$$

weiters

$$r_k = C_k\sqrt{1 - v_k^2}, \quad k = 1, \ldots, m,$$
$$r_{m+1} = C_{m+1}$$

derart, daß

$$C_1 = 1, \quad C_k = v_1 \ldots v_{k-1} \quad \text{für } k \geq 2$$

und schließlich

$$D_k = v_k \quad (k \geq 1),$$

sodaß also

$$C_{k+1} = C_k D_k.$$

Aus (2) folgt nun unmittelbar

$$(dC_{k+1})^2 + (dr_k)^2 = \frac{(dv_k)^2}{1 - v_k^2} C_k^2 + (dC_k)^2.$$

Nehmen wir $k = m$, so bedeutet dies

$$(dr_{m+1})^2 + (dr_m)^2 = \frac{(dv_m)^2}{1 - v_m^2} C_m^2 + (dC_m)^2,$$

für $k = m - 1$ entsprechend

$$(dC_m)^2 + (dr_{m-1})^2 = \frac{(dv_{m-1})^2}{1 - v_{m-1}^2} C_{m-1}^2 + (dC_{m-1})^2$$

usw. und zum Schluß

$$(dC_2)^2 + (dr_1)^2 = \frac{(dv_1)^2}{1 - v_1^2}.$$

Summation all dieser Gleichungen liefert

$$\sum_{k=1}^{m+1} (dr_k)^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(dv_k)^2}{1-v_k^2} C_k^2,$$

also erhalten wir für das Bogenelement $ds^2 = |dz_1|^2 + \cdots + |dz_{m+1}|^2$ der Sphäre

$$(ds)^2 = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{(dv_k)^2}{1-v_k^2} C_k^2 + (1-v_k)^2 C_k^2 (d\psi_k)^2 \right) + (C_{m+1})^2 (d\psi_{m+1})^2$$

und für das Oberflächenelement, wenn wir noch $\psi_j = 2\pi\varphi_j$ setzen,

$$dO = (2\pi)^{m+1} (C_1)^2 \cdots (C_m)^2 C_{m+1} dv_1 \cdots dv_m d\varphi_1 \cdots d\varphi_{m+1}.$$

Nun ist dieses Produkt der C_i gleich $v_1^{2m-1} v_2^{2m-3} \cdots v_m$.

Setzen wir also

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1^{2m}, \quad dw_1 = 2mv_1^{2m-1} dv_1 \\
w_2 &= v_2^{2m-2}, \quad dw_2 = (2m-2) v_2^{2m-3} dv_2 \\
&\vdots \\
w_m &= v_m^2, \quad dw_m = 2v_m dv_m,
\end{aligned}$$

so erhalten wir

$$dO = \frac{(2\pi)^{m+1}}{2m(2m-2)\cdots 2} dw_1 \cdots dw_m d\varphi_1 \cdots d\varphi_{m+1}.$$

Das ist das Resultat, das schon vorher angegeben wurde, abgesehen von der Bezeichnung.

Betrachten wir jetzt den Fall der Sphäre S^{2m}

$$x_1^2 + \cdots + x_{2m+1}^2 = 1.$$

Wenn wir die vorhergehenden Bezeichnungen benützen, so können wir das auch so schreiben:

$$|z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2 + x_{2m+1}^2 = 1.$$

Wir setzen wieder

$$z_k = r_k e^{i\varphi_k} \quad \text{für } k = 1, \ldots, m-1$$

und

$$r_k = C_k \sqrt{1 - v_k^2} \quad k = 1, \ldots, m-1,$$

jetzt allerdings

$$z_m = C_m\sqrt{1-(1-2v_m)^2} \quad \text{und} \quad x_{2m+1} = C_m(1-2v_m).$$

Es bleiben wieder die Formeln

$$(dC_{k+1})^2 + (dr_k)^2 = (dC_k)^2 + \frac{(dv_k)^2}{1-v_k^2}C_k^2 \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, m-1$$

und

$$(dx_{m+1})^2 + (dr_m)^2 = \frac{(2dv_m)^2}{1-(2v_m)^2}C_m^2$$

erhalten.

Damit wird das Bogenelement ds^2 berechnet als

$$\begin{aligned} ds^2 &= |dz_1|^2 + \cdots + |dz_{m-1}|^2 + (dx_{2m+1})^2 && (14)\\ &= \sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{(dv_k)^2}{1-v_k^2}C_k^2 + (1-v_k^2)C_k^2(d\psi_k)^2\right) && (15)\\ &\quad + \frac{(2dv_m)^2}{(1-(1-2v_m))^2}\,C_m^2 + (1-(1-2v_m))^2\,C_m^2(d\psi_m)^2. && (16)\end{aligned}$$

Wenn wir noch $\psi_j = 2\pi\varphi_j$ setzen $(j = 1, \ldots, m)$ wird das Oberflächenelement

$$dO = 2(2\pi)^m C_1^2 \cdots C_{m-1}^2 C_m dv_1 \cdots dv_m d\varphi_1 \cdots d\varphi_m,$$

das Produkt der C_j gleich $v_1^{2m-2}v_2^{2m-4}\cdots v_{m-1}^2 v_m^0$. Wir setzen

$$v_1^{2m-1} = w_1, \quad \text{also} \quad v_1^{2m-2}dv_1 = \frac{dw_1}{2m-1},$$

$$v_2^{2m-3} = w_2, \quad \text{also} \quad v_2^{2m-2}dv_2 = \frac{dw_2}{2m-3}, \ldots, \quad \text{so folgt}$$

$$dO = \frac{2(2\pi)^m}{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}dw_1\cdots dw_m d\varphi_1\cdots d\varphi_m.$$

Numerieren wir jetzt die Variablen w und φ, die im Einheitsintervall $0 \le \eta \le 1$ liegen, durch, also im Fall von S^{2m+1} t_1 bis t_{2m+1}, im Fall von S^{2m} t_1 bis t_m, so haben wir eine Abbildung s des Torus T^n auf die Sphäre S^n.

Haben wir nun eine gleichverteilte Folge $t_1 \cdots t_N$ mit der Lipschitzdiskrepanz $D_N^{(\lambda)}$ und betrachten wir die zugehörige Folge $s(t_1), \ldots, s(t_N)$ und eine Funktion $f(s)$ auf S^n. Sie sei eine Lipschitzfunktion der Ordnung β mit Lipschitzkonstante $\alpha(f, \beta)$, so haben wir sofort

$$|f(s(t)) - f(s(t'))| \leq \alpha(f, \beta)|s(t) - s(t')|^{\beta}.$$

Nun kommt in der Abbildung t auf $s(t)$, wie sie sich in der Parameterdarstellung zeigt, höchstens die Wurzel von der Gestalt $\sqrt{1 - w^{\frac{2}{n-1}}}$ vor, sodaß also

$$|s(t) - s(t')| \leq \alpha'(s) \cdot |t - t'|^{\frac{\beta}{n-1}}.$$

Also hat die Folge $s(t_k)$ sicher eine Lipschitzdiskrepanz von der Ordnung

$$\leq D_N^{(\lambda)\frac{\beta}{n-1}}.$$

Haben wir jetzt statt der einen Sphäre ein Produkt $\Pi_{i=1}^{L} S^{n_i}$ von Sphären, $n = n_1 + \cdots + n_L$, so können wir sofort das entsprechende Produkt $\Pi_{i=1}^{L} T^{n_i} = T^n$ darauf abbilden, indem wir komponentenweise vorgehen. Für die Größenordnung der zugehörigen Lipschitzdiskrepanz ist dann natürlich das größte n_i verantwortlich.

Wir machen jetzt eine Anwendung auf die Gleichverteilung auf der speziellen Drehgruppe und auf der speziellen unitären Gruppe.

Wir konstruieren zunächst eine spezielle Drehung mit der Determinante 1 im $n + 1$-dimensionalen Raum.

Es sei $s^{(n)}(t)$ ein Punkt auf der Sphäre S^n, die durch Abbildung der Torusgruppe T^n auf S^n entstanden ist.

s hat also die Komponenten $s_1, \ldots, s_{n+1}$ (wir lassen vorübergehend die Variable t und den oberen Index (n) der Kürze halber weg). Wir definieren folgende $m + 1$ Zeilenvektoren:
Es sei

$$\hat{E}_1 = s_1, \quad \hat{E}_2 = (-s_2, s_1, 0, \ldots, 0)$$
$$\hat{E}_3 = (-s_3 \cdot s_1, -s_3 \cdot s_2, s_1^2 + s_2^2, 0, \ldots, 0)$$
$$\vdots$$
$$\hat{E}_k = (-s_k \cdot s_1, -s_k \cdot s_2, \ldots, -s_k \cdot s_{k-1}, s_1^2 + s_k^2, 0, \ldots, 0)$$

allgemein bis $\hat{E}_{n+1}$.

Ich verweise in diesem Zusammenhang auf meine Arbeit zur Radontransformation (Sitzungsberichte 198, 331–379).

Diese Vektoren $\hat{E}_1, \ldots, \hat{E}_{n+1}$ stehen aufeinander senkrecht und sind $\neq 0$, wenn $s_1^2 + s_2^2 \neq 0$.

Wir normieren nun diese $n+1$ Vektoren: $E_i = \frac{\hat{E}_i}{\|\hat{E}_i\|}$, $i = 1, \ldots, n+1$. Dann ist tatsächlich

$$D_{n,s^{(n)}(t)} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_{n+1} \end{bmatrix}$$

eine orthogonale Matrix mit der Determinante 1, welche von n Parametern $t_1, \ldots, t_n$ abhängt.

(Für den Fall $s_1^2 + s_2^2 = 0$ verweise ich wieder auf meine Arbeit).

Definieren wir nun bei festem L

$$D_n = \begin{bmatrix} E_{L,n} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & D_{n,s^{(n)}(t)} \end{bmatrix}, \quad n = 1, \ldots, L,$$

wobei $E_{L,n}$ die entsprechende Einheitsmatrix bezeichnet. Bilden wir das Produkt

$$D = D_1 \cdot \ldots \cdot D_L,$$

so hängt D von $1 + \cdots + L = L(L+1)/2$ Parametern ab.

Jetzt können wir die Gleichverteilung auf der Drehgruppe erreichen, indem wir eine Folge auf dem Torus $T^{L(L+1)/2}$ bilden und in der geschilderten Art auf die Drehgruppe übertragen.

Analog behandeln wir die spezielle unitäre Gruppe. Wir konstruieren jetzt U_n in folgender Weise: Wir nehmen einen Punkt $z_1 \cdots z_{n+1}$ mit $|z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1$, also auf der Sphäre S^{2n+1}, und betrachten wieder folgende komplexe Vektoren mit $n+1$ Komponenten:

$$\begin{aligned} \hat{E}_1 &= (z_1, \ldots, z_{n+1}) \\ \hat{E}_2 &= (-\bar{z}_2 \cdot z_1, 0, \ldots, 0) \\ \hat{E}_3 &= (-\bar{z}_3 \cdot z_1, -\bar{z}_3 \cdot z_2, |z_1|^2 + |z_2|^2, 0, \ldots, 0), \end{aligned}$$

allgemein

$$\hat{E}_k = (-\bar{z}_k \cdot z_1, \ldots, -\bar{z}_k \cdot z_{k-1}, |z_1|^2 + \cdots + |z_{k-1}|^2, 0, \ldots, 0),$$
$$k = 2, \ldots, n+1.$$

Diese $n+1$ Vektoren sind unitär orthogonal. Wir normieren sie wieder. Die normierten Vektoren nennen wir $E_1, \ldots, E_{n+1}$. Damit ist dann

$$U_n = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Analog wie bei der Drehgruppe erhalten wir ein U, welches diesmal von $(L+1)^2$ Parametern abhängt.

Wir können wieder $(L+1)^2$ auf die unitäre Gruppe abbilden und damit Gleichverteilung auf die spezielle unitäre Gruppe übertragen.

Man kann die Theorie der Gleichverteilung auch benützen, um die Graßmannschen Mannigfaltigkeiten in Parameterform darzustellen (vgl. Binder – Hlawka – Schoißengeier: Über einige Beispiele für Anwendungen der Theorie der Gleichverteilung, Math. Slovaca 43 (1993), 427–436).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. E. Hlawka, Margaretenstraße 27/II/9, 1040 Wien.