Sitzungsber. Abt. II (1998) 207: 53–69

Die Struktur der Gregorianischen Osterperiode

Von

M. Oswalden

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 18. Juni 1998
durch das w. M. Hermann Haupt)

Abstract

The structure of the Easter Period in the Gregorian Calendar is investigated. Although a strict recurrence of the Easter Sundays will take place only after 5 700 000 years, there are a number of subperiods in the order of centuries and even milleniums, all depending of certain combinations of Epact, Golden Number, and Dominical Letter. These will be described in detail. A set of rules gives the possibility of computing all Easter dates from just one given date.

Einleitung

Unser Kalender, der im Jahre 1582 von Papst Gregor XIII. mit der Bulle "Inter gravissimas" eingeführt wurde, ist durch den Wegfall des Schalttages bei Säkularjahren und durch die Sonnen- und Mondgleichung der Epakte so gut an den Lauf von Sonne und Mond angepaßt, daß erst nach 5 700 000 Jahren die Ostersonntage in der gleichen Reihenfolge wiederkehren würden.

Obgleich dieser überaus große Zeitraum nur von theoretischer Bedeutung ist, stellt die Erforschung der Auswirkungen der Kalenderreform auf die Abfolge der Ostersonntage in der Osterperiode eine reizvolle mathematische Aufgabe dar.

Zahlreiche abschnittsweise Übereinstimmungen der Ostersonntage innerhalb der Osterperiode reichen bis zur Wiederholung jedes Jahrhunderts und weiter bis zur Wiederkehr von Jahrhundertgruppen mit nicht weniger als zwei Dutzend aufeinanderfolgender Jahrhunderte.

Durch die Einführung von Osterdaten mit bestimmten Zeitdifferenzen ("Osterdatenketten") gewinnt man umfassende Einblicke in die Gesamtstruktur der Osterperiode unseres Kalenders: Hinter der Sprunghaftigkeit aufeinanderfolgender Ostersonntage verbirgt sich eine tiefgreifende langfristige Regelmäßigkeit, die auch den bisherigen Ablauf der Ostersonntage einschließt. Zwischen den Ostersonntagen mit gleichem, aber auch zwischen solchen mit verschiedenem Monatsdatum bestehen einheitliche Jahresdifferenzen über die ganze Osterperiode hinweg. Überdies ist es möglich, jedes Osterdatum unter Verwendung herkömmlicher Begriffe des Kalenderwesens (Epakte, Goldene Zahl und Sonntagsbuchstabe) in der Osterperiode umkehrbar eindeutig festzulegen.

I. Vorbemerkungen

$\mathrm{INT}(x)$ ist (für $x \geq 0$) der ganze Teil der Zahl x.
MOD (a; b) für ganzzahliges a und natürliches b ist der kleinste nichtnegative Rest bei der Division von a durch b.

$$\textit{Kurzschreibweisen}: \quad \mathrm{INT}(a+b; c) \mathrel{\hat{=}} \mathrm{INT}((a+b)/c)$$
$$\mathrm{MOD}(a+b; c) \mathrel{\hat{=}} \mathrm{MOD}((a+b); c)$$
$$(x, y) = \text{const.} \mathrel{\hat{=}} (x = \text{const.}, y = \text{const.})$$
$$OP = \text{Gregorianische Osterperiode} (5\,700\,000 \,\text{Jahre})$$

Für die *Jahreszahl* J gilt

$$J = 100\,\mathrm{s} + r \ldots \text{Jahrhundert } s, \text{ Jahrhundertrest } r (00 \text{ bis } 99) \tag{1}$$
$$s = 100\,\mathrm{S} + R \ldots \text{Großjahrhundert } S, \text{Großjahrhundertrest } R \tag{2}$$

$$\sigma = \mathrm{MOD}(s; 25) \tag{3}$$

$$\textit{Goldene Zahl}: \mathrm{MOD}(J; 19) + 1 = a + 1 \tag{4}$$

$$\textit{Epakte}: e = \mathrm{MOD}(11a + 8 - s + \mathrm{INT}(s; 4) + \mathrm{INT}(8s + 13; 25); 30) \tag{5}$$

Ostervollmond: $e = 0 \text{ bis } 23 \ldots (44 - e)-$ ter März, bzw. $(13 - e)-$ ter April;

$e = 24 \ldots 18.$ April; $e = 25 \ldots 18.$ April $(a < 11)$, $17.$ April $(a \geq 11)$;
$$e = 26 \text{ bis } 29 \ldots (43 - e)\text{-ter April} \tag{6}$$

Tagesbuchstaben:

$$21.\text{März} : C, 22.\text{März} : D, 23.\text{März} : E, \dots 23.\text{April} : A, 24.\text{April} : B, \\ 25.\text{April} : C \tag{7}$$

$$\textit{Festzahl}: v = \text{Abstand des Ostersonntags vom 21. März} \tag{8}$$

II. Die Gregorianischen Jahrhunderte

1. Die Parameterdarstellung der Jahrhunderte

Jedes Jahrhundert der OP läßt sich mit Hilfe dreier Parameter beschreiben [4]:

$$\varepsilon = \text{MOD}(8 - s + \text{INT}(s; 4) + \text{INT}(8s + 13; 25); 30) \tag{9}$$

$$\lambda = \text{MOD}(s; 4) \tag{10}$$

$$\alpha = \text{MOD}(100\,\text{s}; 19) \tag{11}$$

ε ist die Epakte e zur Goldenen Zahl eins $(a = 0)$. Aus (5) folgt für das ganze Jahrhundert s

$$e = \text{MOD}(\varepsilon + 11a; 30) \tag{12}$$

Für den Neunzehnerrest a der Jahreszahl J gilt

$$a = \text{MOD}(\alpha + r; 19) \tag{13}$$

Schließlich erhält man mit Hilfe von λ den Sonntagsbuchstaben l des Jahres $J = 100s + r$ (in Schaltjahren für März bis Dezember):

$$\begin{gathered} l = \text{MOD}(2\lambda - r - \text{INT}(r; 4); 7) + 1 \\ (1 \mathrel{\hat{=}} A, 2 \mathrel{\hat{=}} B, 3 \mathrel{\hat{=}} C, 4 \mathrel{\hat{=}} D, 5 \mathrel{\hat{=}} E, 6 \mathrel{\hat{=}} F, 7 \mathrel{\hat{=}} G) \end{gathered} \tag{14}$$

Das Tripel $(\varepsilon, \lambda, \alpha)$ ermöglicht somit die Berechnung aller Wochentage und aller beweglichen Feste des Jahrhunderts s.

Anmerkung. Aus Gründen der Übersichtlichkeit empfiehlt es sich, λ mit dem Sonntagsbuchstaben des jeweiligen Jahrhundertrestes $r = 0$ zu beschreiben: $\lambda = 0 \mathrel{\hat{=}} A, \lambda = 1 \mathrel{\hat{=}} C, \lambda = 2 \mathrel{\hat{=}} E, \lambda = 3 \mathrel{\hat{=}} G$

Beispiel 1. a) Den Jahrhunderten $s = 15, 16, \dots 20$ sind folgende Tripel zugeordnet:

$$s = 15 \dots (1, G, 18) \quad s = 16 \dots (1, A, 4) \quad s = 17 \dots (0, C, 9)$$
$$s = 18 \dots (0, E, 14) \quad s = 19 \dots (29, G, 0) \quad s = 20 \dots (29, A, 5)$$

b) Berechnung des Ostersonntags des Jahres $J = 2038$ aus dem Tripel (29, A, 5):

$(13) \ldots a = 5$; $(12) \ldots$ Epakte $e = 24$ (Ostervollmond am 18. April)

$(14) \ldots$ Sonntagsbuchstabe $l = 3 \mathrel{\hat{=}} C$, $(7) \ldots$ Ostern am 25. April 2038

2. Die vier Ketten der Jahrhunderte

Zu $\Delta s = 100$ erhält man aus (9) und (11)

$$\Delta\varepsilon = 17, \quad \Delta\alpha = 6 \tag{15}$$

Da die Zahlen 17 und 30 teilerfremd sind, nimmt ε bei ständigem Fortschreiten um $\Delta s = 100$ in jedem Zeitraum von 3000 Jahrhunderten alle möglichen 30 Werte an; ebenso treten in jedem Zeitraum von 1900 Jahrhunderten alle 19 Werte von α auf. In der so gebildeten $(30 \times 19 =)$ 570-gliedrigen Kette von Jahrhunderten sind somit alle Tripel (ε, $\lambda =$ const., α) enthalten. Wegen der vier Werte von λ ergibt sich der

Satz 1. In der OP treten 2280 verschiedene Jahrhunderte auf [4].

Anmerkung. Zum Vergleich von Ostersonntagen sind auch die Epakten heranzuziehen. Nur bei übereinstimmenden Monatsdaten und Epakten werden Ostersonntage als gleich bezeichnet. Wenn man auch verschiedene Epakten zuläßt, so verringert sich die Anzahl der verschiedenen Jahrhunderte auf 1573.

Aus (9) ergibt sich für ε eine Periode von 300000 Jahren. Die Wiederkehr der Epakte e erfolgt aber wegen der 19 Werte von a gemäß (12) erst nach $(300000 \times 19 =)$ 5700000 Jahren. In diesem Zeitraum ist die 400-jährige Gregorianische Wochentagsperiode enthalten. Man bekommt so die Länge der OP [6].

Anmerkung. Die OP umfaßt insgesamt 57000 Jahrhunderte. An die Stelle von $s = 15$ bis $s = 57014$ setzt man zweckmäßigerweise $s = 0$ bis $s = 56999$ [2].

Die 570gliedrigen Ketten der Jahrhunderte legen es nahe, jeweils 100 aufeinanderfolgende Jahrhunderte zu einem "Großjahrhundert" $(S = 100S + R)$ zusammenfassen. Die Tabelle 1 gibt die ersten 100 Gregorianischen Jahrhunderte durch ihre Tripel $(\varepsilon, \lambda, \alpha)$ wieder $(S = 0)$.

Für die weiteren Großjahrhunderte $(S = n, n = 1, 2, \ldots 569)$ gilt wegen $\Delta s = 100$ nach (15):

$$\varepsilon_n = \mathrm{MOD}(\varepsilon_0 + 17n; 30), \quad \alpha_n = \mathrm{MOD}(\alpha_0 + 6n; 19) \tag{16}$$

Die Werte von s in der Tabelle 1 sind auch die Hunderterreste R von s ("Großjahrhundertreste") für alle übrigen Großjahrhunderte. Jedes Jahrhundert der Tabelle 1 ist demnach Anfangsglied für eine der vier Gregorianischen Ketten der Jahrhunderte (entsprechend den vier Werten von λ).

Anmerkung. Alle Jahrhunderte der OP lassen sich mit 570 Tabellen nach Art der Tabelle 1 erfassen. Durch den einfachen Zusammenhang (15) dieser Tabellen ergibt sich auch ohne deren tatsächliche Ausführung leicht ein Gesamtüberblick über die Jahrhunderte der OP. Bei übereinanderliegenden Tabellen liegen auch die 570 Glieder jeder der 100 Ketten der Jahrhunderte übereinander.

Wegen $\lambda =$ const. bei den Ketten der Jahrhunderte fallen gemäß (14) Monatsdatum und Wochentag für $r =$ const. bei allen Jahrhunderten einer Kette zusammen.

Tabelle 1. Die ersten 100 Gregorianischen Jahrhunderte (1. Großjahrhundert)

$s \ldots (\varepsilon_0, \lambda, \alpha_0)$	$s \ldots (\varepsilon_0, \lambda, \alpha_0)$	$s \ldots (\varepsilon_0, \lambda, \alpha_0)$	$s \ldots (\varepsilon_0, \lambda, \alpha_0)$
00 . . . (08, A, 00)	01 . . . (07, C, 05)	02 . . . (07, E, 10)	03 . . . (06, G, 15)
04 . . . (06, A, 01)	05 . . . (06, C, 06)	06 . . . (05, E, 11)	07 . . . (04, G, 16)
08 . . . (05, A, 02)	09 . . . (04, C, 07)	10 . . . (03, E, 12)	11 . . . (03, G, 17)
12 . . . (03, A, 03)	13 . . . (02, C, 08)	14 . . . (02, E, 13)	15 . . . (01, G, 18)
16 . . . (01, A, 04)	17 . . . (00, C, 09)	18 . . . (00, E, 14)	19 . . . (29, G, 00)
20 . . . (29, A, 05)	21 . . . (29, C, 10)	22 . . . (28, E, 15)	23 . . . (27, G, 01)
24 . . . (28, A, 06)	25 . . . (27, C, 11)	26 . . . (26, E, 16)	27 . . . (26, G, 02)
28 . . . (26, A, 07)	29 . . . (25, C, 12)	30 . . . (25, E, 17)	31 . . . (24, G, 03)
32 . . . (24, A, 08)	33 . . . (24, C, 13)	34 . . . (23, E, 18)	35 . . . (22, G, 04)
36 . . . (23, A, 09)	37 . . . (22, C, 14)	38 . . . (21, E, 00)	39 . . . (21, G, 05)
40 . . . (21, A, 10)	41 . . . (20, C, 15)	42 . . . (19, E, 01)	43 . . . (19, G, 06)
44 . . . (19, A, 11)	45 . . . (18, C, 16)	46 . . . (18, E, 02)	47 . . . (17, G, 07)
48 . . . (17, A, 12)	49 . . . (17, C, 17)	50 . . . (16, E, 03)	51 . . . (15, G, 08)
52 . . . (16, A, 13)	53 . . . (15, C, 18)	54 . . . (14, E, 04)	55 . . . (14, G, 09)
56 . . . (14, A, 14)	57 . . . (13, C, 00)	58 . . . (13, E, 05)	59 . . . (12, G, 10)
60 . . . (12, A, 15)	61 . . . (12, C, 01)	62 . . . (11, E, 06)	63 . . . (10, G, 11)
64 . . . (11, A, 16)	65 . . . (10, C, 02)	66 . . . (09, E, 07)	67 . . . (08, G, 12)
68 . . . (09, A, 17)	69 . . . (08, C, 03)	70 . . . (07, E, 08)	71 . . . (07, G, 13)
72 . . . (07, A, 18)	73 . . . (06, C, 04)	74 . . . (06, E, 09)	75 . . . (05, G, 14)
76 . . . (05, A, 00)	77 . . . (05, C, 05)	78 . . . (04, E, 10)	79 . . . (03, G, 15)
80 . . . (04, A, 01)	81 . . . (03, C, 06)	82 . . . (02, E, 11)	83 . . . (02, G, 16)
84 . . . (02, A, 02)	85 . . . (01, C, 07)	86 . . . (01, E, 12)	87 . . . (00, G, 17)
88 . . . (00, A, 03)	89 . . . (00, C, 08)	90 . . . (29, E, 13)	91 . . . (28, G, 18)
92 . . . (28, A, 04)	93 . . . (28, C, 09)	94 . . . (27, E, 14)	95 . . . (26, G, 00)
96 . . . (27, A, 05)	97 . . . (26, C, 10)	98 . . . (25, E, 15)	99 . . . (25, G, 01)

3. Die Wiederkehr der Jahrhunderte

Zu $\lambda = \text{const.}$ gibt es genau 25 übereinstimmende Ketten der Jahrhunderte. Für den Gregorianischen Kalender gilt somit der

Satz 2. In der OP tritt jeder Jahrhunderttyp $(\varepsilon, \lambda, \alpha)$ genau 25fach auf.

Die 25 Zeitdifferenzen für die Wiederholung ganzer Jahrhunderte nehmen nur drei voneinander verschiedene Werte in Abhängigkeit von $\sigma = \text{MOD}(s; 25)$ an [4]. (Beweis mittels $\Delta s = 76\,k$ in [1])

$$\begin{aligned} \Delta\, s &= 836 \ldots \sigma = 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 2, 5, 8, 11, 14 \\ \Delta\, s &= 3420 \ldots \sigma = 17, 20, 23, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 \\ \Delta\, s &= 4256 \ldots \sigma = 22, 0, 3 \end{aligned} \tag{17}$$

Beispiel 2. Wiederholung des Jahrhunderts $s = 20$:

$s = 3440, 4276, 7696, 8532, 11952, \ldots 46836, 47672, 51928, 56184, (57020)$

4. Die Wiederkehr benachbarter Jahrhunderte

Wie aus (17) hervorgeht, erfolgt nach $\Delta s = 4256$ Jahrhunderten die Wiederkehr aller Gregorianischen Jahrhunderte mit bloßer Ausnahme von $\sigma = 11$ und $\sigma = 14$.

Beispiel 3. Die Ostersonntage der Jahre 1583 bis 3599 wiederholen sich in den Jahren 427183 bis 429199.

Durch fortgesetzte Anwendung von (17) erhält man schließlich die Wiederkehr bis zu 24 aufeinanderfolgender Jahrhunderte.

Beispiel 4. Nach 26372 Jahrhunderten erfolgt die Wiederkehr der Jahrhunderte mit Ausnahme von $\sigma = 17$ und nach $(57000 - 26372 =)$ 30628 Jahrhunderten mit Ausnahme von $\sigma = 14$.

Die Ostersonntage der Jahre 1800 bis 4199 wiederholen sich in den Jahren 2639000 bis 2641399.

5. Die 25 Jahrhunderte zu einem vorgegebenen Tripel $(\varepsilon, \lambda, \alpha)$

Aus (9) und (11) erhält man für

$$\Delta\, s = 6000 \ldots \Delta\varepsilon = 0, \quad \Delta\alpha = -1 \tag{18}$$

$$\Delta\, s = 32300 \ldots \Delta\varepsilon = 1, \quad \Delta\alpha = 0 \tag{19}$$

Zum beliebigen Jahrhundert mit dem Tripel $(\bar{\varepsilon}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha})$ gilt wegen (18) und (19) für das Jahrhundert s mit dem Tripel $(\varepsilon, \lambda = \bar{\lambda}, \alpha)$

$$s = 32300 \cdot (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) + 6000 \cdot (\bar{\alpha} - \alpha) + \bar{s}$$

Wenn man $\bar{s} = 25\lambda + 4k (k = 0, 1, 2, \ldots)$ setzt, so ergibt sich mit (9) und $\bar{\alpha} = \mathrm{MOD}(11\lambda + k; 19)$ nach (11) für die gesuchten 25 Jahrhunderte mit übereinstimmenden Parametern $\varepsilon, \lambda, \alpha$:

$$\boxed{\begin{aligned} s \equiv 32300 \cdot (\varepsilon - \mathrm{INT}(7\,k + 13; 25)) + 13604\,k - 6000\alpha \\ + 22325\lambda + 26600 \;\; k = 0, 1, 2, \ldots 24 \qquad \bmod 57000 \end{aligned}} \tag{20}$$

Die Großjahrhundertreste R der 25 Jahrhunderte erhält man auch aus

$$R = \mathrm{MOD}(25\lambda + 4k; 100) \tag{21}$$

Umgekehrt errechnet man den Wert von k zu vorgegebenen R aus

$$k = \mathrm{MOD}(\mathrm{INT}(R; 4) + 19 \cdot \mathrm{MOD}(R; 4); 25) \tag{22}$$

Beispiel 5. Gesucht ist das Jahrhundert (29, A, 5) zu $R = 36$. Aus (22) erhält man $k = 9$, und aus der Formel (20) errechnet man das Jahrhundert $s = 46836$ im Einklang mit Beispiel 2.

Wenn man die zeitliche Abfolge des Auftretens eines Jahrhunderttyps $(\varepsilon, \lambda, \alpha)$ zur Numerierung der 25 Jahrhunderte verwendet, so erhält man einen weiteren Parameter n, der eine umkehrbar eindeutige Zuordnung innerhalb der OP ermöglicht:

Beispiel 6.

$$\begin{aligned} s &= (\varepsilon, \lambda, \alpha, n) \\ s &= 20 \ldots s = (29, \mathrm{A}, 5, 1) \\ s &= 46836 \ldots s = (29, \mathrm{A}, 5, 22) \end{aligned} \tag{23}$$

III. Die abschnittsweise Wiederkehr der Gregorianischen Ostersonntage

1. Das Schema der Osterdaten

In der ersten Zeile der Tabelle 2 sind die 30 Gregorianischen Epakten wie bei der jährlichen Abfolge mit $\Delta e = 11$ eingetragen. Die Sonntagsbuchstaben der ersten Spalte gelten für $\Delta J = 19$.

In die hiermit vorgegebenen $(30 \times 28 =)840$ Felder kann man nun mittels (6) und (7) die entsprechenden Ostersonntage eintragen. Bei den Sonntagsbuchstaben ist deren Rückwärtsschreiten im Zyklus A bis G von

Tabelle 2. Schema der Osterdaten

e =	08	19	00	11	22	03	14	25	. . .	26	07	18	. . .	16	27
BA	09A-0	01A	14A	06A	28M-1	17A	02A	22A	. . .	22A	07A	29M	. . .	02A-0	22A
F	07A	29M	18A	03A	26M	14A	06A	19A	. . .	19A	19A	27M	. . .	31M	19A
C	11A	27M	15A-3	07A	23M	12A	03A	23A	. . .	23A-0	08A	31M	. . .	04A	17A
G	08A	31M	20A	04A-1	27M	16A	01A	20A-2	. . .	21A	12A	28M	. . .	01A	21A
ED	12A	28M	17A	09A	24M	13A	05A	∗	. . .	18A	10A	01A-3	. . .	29M	18A
B	10A	01A-3	14A	06A	29M	17A	02A	22A	. . .	22A	07A	30M	. . .	03A	22A-3
F	07A	30M	18A-1	03A	26M	15A	06A-2	19A	. . .	19A	11A	27M	. . .	31M	20A
C	11A	27M	16A	07A	23M	12A	04A	23A-0	. . .	24A	08A-3	31M	. . .	04A	17A
AG	08A-3	31M	20A	05A	27M	16A	01A	21A	. . .	21A	13A	28M-1	. . .	01A-3	21A
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
C	11A	26M-0	15A	07A	23M	11A-1	03A	23A	. . .	23A	08A	31M	. . .	04A	23A-0
G	08A	31M	19A	04A	27M	16A	31M	20A	. . .	20A-2	12A	28M	. . .	01A	21A
D	12A	28M	17A	08A-3	24M	13A	05A	24A	. . .	18A	09A-0	01A	. . .	29M	18A

∗ . . . Epakte 25: 18A. . . a>10, 25A. . . a<11

Jahr zu Jahr zu beachten, sowie die Stellung der Ausgangsjahre (in der zweiten Spalte der Tabelle 2) im vierjährigen Schaltzyklus.

Diese schematische Darstellung ermöglicht die blockweise Entnahme der Ostersonntage aller Jahrhunderte mittels der Tripel $(\varepsilon, \lambda, \alpha)$. In jeder Spalte der Epakten gibt es genau vier Jahrhundertanfänge $(r = 0)$ im Einklang mit den vier Werten von λ, in der Tabelle 2 mit 0, 1, 2, 3 nach den Ostersonntagen bezeichnet.

Bei den Jahrhunderten $(8, \lambda, \alpha)$ steht das erste Jahr in der Spalte α, gerechnet von der Ausgangsepakte 8. So beginnt (8, C, 4) bei $e = 22$ am 28. März, reicht wegen $\varepsilon = 8$ bis $e = 26$ (22. April, $r = 14$) und kehrt dann bei $r = 15$ zum Beginn des Metonschen Zyklus nach 19 Jahren zurück (7. April).

Der Epaktenzyklus $\varepsilon = 19$ reicht bis $e = 7$. In der vierten Zeile der Ostersonntage beginnt das Jahrhundert (19, C, 2) mit dem 4. April und reicht bis zum 21. April $(r = 99)$.

Beim Überschreiten der unteren Grenze des Schemas erfolgt Rückkehr zur ersten Zeile der Ostersonntage. Beim Überschreiten der rechten Grenze setzt man bei $e = 8$ fort, allerdings mit einem Abstand von sechs Zeilen wegen der erforderlichen Übereinstimmung der Sonntagsbuchstaben. Die Entnahme der Ostersonntage jedes Jahrhunderts ist somit durch höchstens drei Blöcke möglich.

2. Das Schema der abschnittsweisen Wiederkehr der Ostersonntage

Der geringe Umfang des Schemas der Osterdaten legt die Vermutung nahe, daß in unserem Kalender neben der Wiederholung ganzer Jahrhunderte in der OP eine Wiederkehr der Ostersonntage auch noch für andere Zeitabschnitte erfolgt.

Wenn man in der Tabelle 2 zu den Anfängen der Jahrhunderte $(r = 0)$ auch noch die übrigen Jahrhundertreste einträgt, so erhält man die vollständige Liste der abschnittsweisen Wiederkehr der Ostersonntage (Tabelle 3).

Beispiel 7. Der zweiten Zeile der unteren Hälfte der Tabelle 3 entnimmt man A. . . C, $r = 04$, $\Delta\alpha = 4$. Zu (29, A, 5) etwa erhält man (29, C, 9). Die Formel (20) ergibt übereinstimmende Ostersonntage von 2004 bis 2099 und 176500 bis 176595.

3. Sonderfälle der abschnittsweisen Wiederkehr der Ostersonntage

a) Ein besonderes Merkmal des Gregorianischen Kalenders ist die Wiederkehr aufeinanderfolgender Ostersonntage nach 152 Jahren in Abschnitten zu 48, 52 und 100 Jahren [5].

Mit Hilfe der Tabelle 1 findet man zu gleichen Epaktenzyklen beim erforderlichen Überschreiten der Säkularjahre ohne Schalttag (wegen der Übereinstimmung der Sonntagsbuchstaben) nicht weniger als 40 solcher Abschnitte je Großjahrhundert.

Seit der Kalenderreform vom Jahre 1582 fand bereits einmal eine Wiederholung der Ostersonntage nach 152 Jahren für den Zeitraum 1700–1747 bei den Jahren 1852–1899 statt. Gegenwärtig befinden wir uns in einem 100jährigen Abschnitt, der 1948 begonnen hat. Dann folgt ein 52jähriger Abschnitt von 2248–2299.

b) Neben dieser kurzfristigen Wiederkehr der Epaktenzyklen ist auch die erste langfristige nach rund 70 Jahrhunderten für eine abschnittsweise Wiederholung der Ostersonntage geeignet. Laut Tabelle 1 und Tabelle 3 sind folgende Jahresdifferenzen möglich:

$$\Delta J = 6688 (r = 12 \text{ bis } 99) \quad \Delta J = 6840 (r = 60 \text{ bis } 99)$$
$$\Delta J = 6992 (r = 08 \text{ bis } 99) \quad \Delta J = 7144 (r = 56 \text{ bis } 99)$$

Beispiel 8. Laut Tabelle 1 haben die Jahrhunderte $s = 20$ und $s = 90$ gleiche Epaktenzyklen $(\varepsilon = 29)$. Mit $\Delta J = 6692$ findet man übereinstimmende Ostersonntage von 2008 bis 2099 mit 9000 bis 9091.

c) Die Tabelle 3 enthält in zwei Zeilen Jahrhundertreste mit übereinstimmenden Ostersonntagen bei unverändertem Parameter λ, wodurch Aussagen für *alle* Jahrhunderte möglich sind. Besonders geeignet sind hierzu

Tabelle 3. Die abschnittsweise Übereinstimmung der Ostersonntage

Übereinstimmung der Ostersonntage von 00 bis r mit (99 − r) bis 99		
G... A	$r = 03, 31, 59, 87$	$\Delta\alpha = 18, 8, 17, 7$
G... C, E...A	$r = 07, 35, 63, 91$	$\Delta\alpha = 3, 12, 2, 11$
G... E, E...C, C...A	$r = 11, 39, 67, 95$	$\Delta\alpha = 7, 16, 6, 15$
A... A, C...C, E...E, G...G	$r = 15, 43, 71, 99$	$\Delta\alpha = 11, 1, 10, 0$
A... C, C...E, E...G	$r = 19, 47, 75$	$\Delta\alpha = 15, 5, 14$
A... E, C...G	$r = 23, 51, 79$	$\Delta\alpha = 0, 9, 18$
A... G	$r = 27, 55, 83$	$\Delta\alpha = 4, 13, 3$
	Epaktenzyklus $\varepsilon = \text{const.}$	
Übereinstimmung der Ostersonntage von r bis 99 mit 00 bis (99 − r)		
A... A, C...C, E...E, G...G	$r = 00, 28, 56, 84$	$\Delta\alpha = 0, 9, 18, 8$
A... C, C...E, E...G	$r = 04, 32, 60, 88$	$\Delta\alpha = 4, 13, 3, 12$
A... E, C...G	$r = 08, 36, 64, 92$	$\Delta\alpha = 8, 17, 7, 16$
A... G	$r = 12, 40, 68, 96$	$\Delta\alpha = 12, 2, 11, 1$
G... A	$r = 16, 44, 72$	$\Delta\alpha = 16, 6, 15$
G... C, E...A	$r = 20, 48, 76$	$\Delta\alpha = 1, 10, 0$
G... E, E...C, C...A	$r = 24, 52, 80$	$\Delta\alpha = 5, 14, 4$

die Ketten der Jahrhunderte (II. 2), da bei diesen $\Delta\alpha = 9$ (für $\Delta S = 30$) gilt. Man erhält den grundlegenden

> **Satz 3.** Nach 299972 Jahren wiederholen sich die Ostersonntage der Jahrhundertreste $r = 28$ bis 99.

d) Der Schalttag der Säkularjahre $\lambda = A, r = 0$ macht es möglich, mit aufeinanderfolgenden Jahrhunderten G und A (bei gleichem Epaktenzyklus) alle Jahrhunderte E und C darzustellen.

Beispiel 9. Für $s = 21 \ldots$ (29, C, 10) entnimmt man der vorletzten Zeile der Tabelle 3 $r = 20$ und $\Delta\alpha = 1$. Zu (29, G, 9) ist nach Formel (20), beispielsweise für $k = 11, s = 3019$. Die Ostersonntage der Jahre 2100 bis 2199 stimmen mit den Ostersonntagen der Jahre 301920 bis 302019 überein.

e) Die 28jährige Periode der Sonntagsbuchstaben eignet sich für eine einfache abschnittsweise Darstellung aller Gregorianischen Ostersonntage. Dazu dienen 570 Gruppen von 28 aufeinanderfolgenden Osterdaten einer beliebigen Kette der Jahrhunderte (II. 2). Die 28 Jahrhundertreste der aufeinanderfolgenden Osterdaten liegen in jedem Jahrhundert im gleichen Intervall.

Beispiel 10. Die Ostersonntage des Jahrhunderts $s = 20 \ldots$(29, A, 5) sind durch aufeinanderfolgende Jahrhundertreste $r_1 = 70$ bis $r_2 = 97$ von $R = 19(\lambda = \mathrm{G})$ darzustellen.

In der unteren Hälfte der Tabelle 3 findet man in der Zeile G. . . A zum Jahrhundertparameter $\lambda = \mathrm{A}$ $(s = 20)$ im Intervall $[r_1 = 70, r_2 = 97]$ das Schaltjahr $r_0 = 72$ mit dem Sonntagsbuchstaben BA, dazu $\Delta\alpha = 15$. Dem ersten gesuchten Jahrhundert ist somit das Tripel (29, G, 9). . . $s = 3019$ zugeordnet. Für die weiteren Jahrhunderte gilt nach Tabelle 3 $\Delta\alpha = 9$, das bedeutet ein Fortschreiten in der Kette der Jahrhunderte um $\Delta S = 30$:

2000 . . . 301972	2026 . . . 601970	2054 . . . 901970	2082 . . . 1201970
. . .	. . .	. . .	. . .
2025 . . . 301997	2053 . . . 601997	2081 . . . 901997	2099 . . . 1201987

IV. Die Gregorianischen Osterdatenketten

1. Die Osterdatenketten des Jahrhundertrestes

Mit dem Schema der abschnittsweisen Übereinstimmung der Ostersonntage (Tabelle 3) erhält man Einblicke in Teilbereiche der OP. Aufschlüsse über deren Gesamtstruktur geben die "Osterdatenketten". Es sind dies

Zusammenfassungen einer größeren Anzahl ausgewählter Ostersonntage, deren Zeitdifferenzen von der Ordnungsnummer der Kettenglieder abhängen.

In jeder Kette der Jahrhunderte (II. 2) kann man 570 Osterdaten mit $r =$ const. zusammenfassen. Nach (4) und (5) gilt für $\Delta S = 19 : \Delta e = 23, a =$ const. und für $\Delta S = 1 : \Delta a = 6$. Somit treten alle Paare (e, a) auf. Im Hinblick auf MOD(J; 10000) $= 100R + r$ gilt der grundlegende

Satz 4. Zu jedem Zehntausenderrest der Jahreszahlen gibt es in der OP alle Paare von Epakte und Goldener Zahl.

Für die mit $r =$ const. gebildeten Osterdatenketten des Jahrhundertrestes gilt nach (14) $l =$ const. Es gibt demnach nur sieben verschiedene Ostersonntagsketten.

Satz 5. Mit nur sieben 570gliedrigen Ostersonntagsketten (zum Jahrhundertrest) lassen sich alle Osterdaten der OP darstellen.

Anmerkung. Laut (7) gibt es in jeder Ostersonntagskette des Jahrhundertrestes genau fünf Ostersonntage mit einwöchigem Abstand.

Um ein vorgegebenes Paar (e, a) in einer der 10000 Osterdatenketten des Jahrhundertrestes aufzufinden, setzt man in der Formel (20) gemäß (12)

$$\varepsilon = \mathrm{MOD}(e - 11a; 30) \tag{24}$$

und nach (13)

$$\alpha = \mathrm{MOD}(a - r; 19) \tag{25}$$

Mit $J = 100s + r$ erhält man

$$\boxed{\begin{aligned} J \equiv 3230000 \cdot (e - (7k + 13; 25)) + 1360400k + 2232500\lambda \\ + 600001\, r + 3770000a + 2660000 \\ k = 0, 1, 2, \ldots 24 \qquad \bmod 5700000 \end{aligned}} \tag{26}$$

Durch feste Werte von k, λ, r wird zufolge (21), (22) und Satz 4 jede Osterdatenkette des Jahrhundertrestes zur Gänze erfaßt.

Beispiel 11. Die Osterdatenkette $R = 20, r = 38$ beginnt mit dem 25. April 2038 (Beispiel 1b). 28M, 4A, 11A, 18A und 25A bilden die zugehörige Ostersonntagskette. Für den 28. März etwa findet man mit (6) und (7)

$e = 17$ bis $e = 23$. Zu den Werten 0 bis 18 von a errechnet man mit der Formel (26) insgesamt $(7 \times 19 =)$ 133mal den 28. März.

Anmerkung. Nun läßt sich leicht die *Häufigkeit der Ostersonntage in der OP* nachvollziehen: $19 \times 25\times$ Anzahl der Epakten $\times\, w$ mit $w = 56, 57, 58,$ wobei w die Häufigkeit des betreffenden Sonntags in der 400jährigen Gregorianischen Wochentagsperiode angibt [3].

Der Term $v + |v - 7|$ folgt dem Rhythmus der Epakte zum Ostervollmond mit dem größten Abstand vom Ostersonntag mit der Festzahl v. Aus der Formel (26) ergibt sich unter Berücksichtigung von $\Delta J = 2470000$ für $\Delta e = -1$ und $e = 23$ für die Festzahl $v = 1$ laut (6), (7) und (8)

$$\boxed{\begin{aligned} J(v) \equiv\ & 1235000 \cdot (v + |v - 7| + 2n) + 2470000 \cdot \mathrm{INT} \\ & \times (7k + 13; 25) + 1360400k + 2232500\lambda + 600001r \\ & + 3770000a + 5605000 \quad \operatorname{mod} 5700000 \end{aligned}} \tag{27}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots z - 1, z \ldots$ Anzahl der Epakten nach (6)
$k = 0, 1, 2, \ldots 24 \quad \lambda = 0, 1, 2, 3 \quad a = 0, 1, 2, \ldots 18$
$v = 28$ (18A) $\ldots n = 0$ bis 6 und $n = 7, a > 10$
$v = 35$ (25A) $\ldots n = 0, a < 11$ und $n = 1$
Die Jahrhundertreste r zur Festzahl v findet man mit Hilfe des Sonntagsbuchstabens l. Für diesen ist nach (7) und (8)

$$l = \mathrm{MOD}(v + 2; 7) + 1 \tag{28}$$

Mit

$$\rho = 4 \cdot \mathrm{MOD}(6\lambda + 4 \cdot (l - 1); 7) + \tau \ldots \tau = 0, 6, 17, 23$$

lauten die gesuchten Jahrhundertreste

$$r = \mathrm{MOD}(\rho; 28) + 28t \ldots t = 0, 1, 2, 3\ [2] \tag{29}$$

Zusammenfassung:

Die Formeln (26) und (27) beinhalten jedes Osterdatum der OP genau einmal.

Laut Formel (26) kann man jedem Osterdatum vier Parameter umkehrbar eindeutig in der OP zuordnen:

$$\boxed{(e, R, r, a) = \text{Osterdatum } (\text{Tag, Monat}, 0 \leq \text{ Jahreszahl} < 5700000)} \tag{30}$$

Beispiel 12.

$$(24, 20, 38, 5) = 25.\ \text{April}\ 2038$$
$$(17, 20, 38, 10) = 28.\ \text{März}\ 1942038$$

Anmerkung. Die Zuordnung (30) ermöglicht eine *systematische Anordnung der Osterdaten*: Man läßt die vier Parameter e, R, r, a alle Werte wie bei einem Zählwerk durchlaufen. Die 19 Werte von a liefern gleiche Ostersonntage. Nach $a = 18$ wird r auf $r + 1$ erhöht usw. Zu $e =$ const. erhält man 190000 Osterdaten, deren Ostersonntage innerhalb einer Woche liegen.

2. Die Osterdatenketten der Goldenen Zahl

Die Untersuchung der Ketten der Jahrhunderte (II. 2) im Hinblick auf $a =$ const. führt zu den 1900 Ketten der Goldenen Zahl. Jedes der 570 Glieder dieser Ketten enthält fünf oder sechs Ostersonntage zu Jahrhundertresten mod 19. Mit den Ostersonntagen einer einzigen Kette der Goldenen Zahl lassen sich alle 25 Jahrhunderte mit dem gleichen Parameter λ darstellen. (Beim Übergang von $a < 11$ zu $a \geq 11$ und umgekehrt ist jedoch zu beachten, daß bei $e = 25$ der 25. April durch den 18. April zu ersetzen ist und umgekehrt.)

3. Die Osterdatenketten der Epakte

Schließlich erhält man zu $e =$ const. mittels der Ketten der Jahrhunderte (II. 2) die 3000 Osterdatenketten der Epakte. Jedes der $(19 \times 19 =)$ 361 Glieder enthält wieder fünf oder sechs Ostersonntage. Jede Kette setzt sich aus sieben Ostersonntagsketten zusammen, deren Jahresdifferenzen in der gesamten OP für alle Epakten gelten.

4. Die elementaren Osterdatenketten

Besonders hervorzuhebende Bausteine der OP erhält man zu $\lambda =$ const. mit der Bedingung $(e, r) =$ const. Die so gewonnenen Osterdatenketten vermitteln den weitläufigen Zusammenhang zwischen gleichen und zwischen verschiedenen Ostersonntagen.

Laut Formel (26) gibt es in jeder Kette der Jahrhunderte (II. 2) für $e =$ const. durch die 19 Werte von a jeweils 19 gleiche Ostersonntage. Somit gilt wegen der 25 Jahrhunderte mit dem gleichen Parameter λ der grundlegende

> **Satz 6.** Jeder Ostersonntag kommt mit jeder seiner Epakten und jedem zugehörigen Jahrhundertrest genau $(19 \times 25 =)$ 475mal in der OP vor.

Tabelle 4. Jahrhundertdifferenzen zu den elementaren Osterdatenketten

$\Delta s = 52,$	$\Delta a = 13:$	$\sigma = 15, 18, 21, 24, 2, 5, 8, 11, 14$	$a = 0$ bis 5
$\Delta s = 64,$	$\Delta a = 16:$	$\sigma = 17, 20, 23, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 0$	
			$a = 3$ bis 18
$\Delta s = 116,$	$\Delta a = 10:$	$\sigma = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 0, 3, 6, 9, 12$	
			$a = 0$ bis 2
		$\sigma = 3, 6, 9, 12$	$a = 3$ bis 5
		$\sigma = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 2, 5, 8, 11, 14$	
			$a = 6$ bis 8
$\Delta s = 180,$	$\Delta a = 7:$	$\sigma = 3, 6, 9$	$a = 9$ bis 11
		$\sigma = 17, 20, 23$	$a = 0$ bis 2
		$\sigma = 12, 15, 18, 21, 24, 2, 5, 8, 11, 14$	$a = 12$ bis 18
$\Delta s = 244,$	$\Delta a = 4:$	$\sigma = 3, 6, 9$	$a = 15$ bis 18
$\Delta s = 296,$	$\Delta a = 17:$	$\sigma = 21, 24, 2, 5, 8, 11, 14$	$a = 9$ bis 11
$\Delta s = 360,$	$\Delta a = 14:$	$\sigma = 3, 6, 9$	$a = 12$ bis 14
		$\sigma = 12, 15, 18$	$a = 9$ bis 11

Anmerkung. Wegen der Ausnahmeregelung bei der Epakte 25 ist die Zahl 475 beim 18. April durch 200 und beim 25. April durch 275 zu ersetzen.

Je 475 gleiche Ostersonntage bilden also zu den 30 Werten von e und zu den 400 Werten von r insgesamt 12000 Osterdatenketten als Bausteine der OP. Für diese elementaren Osterdatenketten errechnet man mit (5) sieben Werte von Δs für benachbarte Glieder in ausschließlicher Abhängigkeit von $\sigma = \mathrm{MOD}(s; 25)$ und a (Tabelle 4).

Beispiel 13. Die von $J = 2000$ ausgehende elementare Osterdatenkette 23. April, $e = 24, r = 0, \lambda = A$ führt wegen $\sigma = 20, a = 5$ und $\Delta s = 64$ über $J = 8400$ mit $\sigma = 9, a = 2$ zu $J = 20000$ usw.:

$$2000, 8400, 20000, 26400, 56000, \ldots 5666000, 5672400, 5684000$$

Durch die Einführung von *Anfangsgliedern* bei den elementaren Osterdatenketten, etwa mit $\sigma = 0$ und $a = 0$, erhält man ein einheitliches Schema der aufeinanderfolgenden Jahrhundertdifferenzen (Tabelle 5).

Anmerkung. Bei den 56 elementaren Osterdatenketten $e = 25, l = C$ ist zu beachten, daß für $a < 11$ der 25. April und für $a \geq 11$ der 18. April Ostersonntag ist.

Tabelle 5. Schema der elementaren Osterdatenketten

$\underline{1.}$ $a = 0, \Delta s = 0,$ $\underline{2.}$ $a = 10, \Delta s = 116,$ $\underline{3.}$ $a = 7, \Delta s = 180,$
$\underline{4.}$ $a = 17, \Delta s = 296,$ $\underline{5.}$ $a = 5, \Delta s = 476,$ $\underline{6.}$ $a = 2, \Delta s = 540,$
$\ldots$ $\underline{474.}$ $a = 18, \Delta s = 56692,$ $\underline{475.}$ $a = 15, \Delta s = 56756$

Nach (2) und (3) ist $\sigma = 0$ gleichwertig mit $\mathrm{MOD}(R; 25) = 0$, dies wiederum bedeutet laut (21) $k = 0$. Man erhält also die Anfangsglieder aus den Formeln (26) und (27) mittels $k = 0$ und $a = 0$.

Beispiel 14. Das Anfangsjahr der elementaren Osterdatenkette, die das zuletzt aufgetretene früheste Osterdatum (22. März 1818) enthält, ist wegen $e = 23, \lambda = 2, r = 18$ nach Formel (26) mit $k = 0$ und $a = 0$ das Jahr 1015018. Mit der Tabelle 5 findet man:

$$J_1 = 1015018, J_2 = 1026618, J_3 = 1033018, \ldots J_{390} = 5690218,$$
$$J_{391} = 5695418, \underline{J_{392} = 1818}, J_{393} = 19818, \ldots J_{475} = 990618$$

Den bemerkenswerten *Zusammenhang aller Osterdatenketten* erhält man mittels der Anfangsglieder $(k = 0, a = 0)$ aus der Formel (26).

$$\boxed{\Delta J \equiv 3230000\Delta e + 2232500\Delta\lambda + 600001\Delta r \mod 5700000} \tag{31}$$

So läßt sich etwa zu jedem Osterdatum des 22. März $(e = 23)$ ein solches des 25. April $(e = 24)$ mit gleicher Goldener Zahl angeben.

Beispiel 15. Von der elementaren Osterdatenkette des 22. März im Beispiel 14 gelangt man mittels der Formel (31) zur elementaren Osterdatenkette $e = 24, \lambda = 0, r = 38$ des 25. April (Beispiel 1b) durch Addition von $\Delta J = 5065020$. Der umgekehrte Weg führt über $\Delta J = 634980$. Die Übereinstimmung der Goldenen Zahlen ergibt sich aus MOD $(\Delta J; 19) = 0$, grundsätzlich aber aus den Tabellen 4 und 5.

Überaus bemerkenswert ist der Zusammenhang von Ostersonntagen mit sieben Epakten und einem gegenseitigen Abstand von einer, zwei oder drei Wochen. Für $\Delta e = -7, \Delta\lambda = 0, \Delta r = 0$ gibt nämlich die Formel (31) $\Delta J = 190000$ als einzige Zeitdifferenz zwischen Ostersonntagen mit einer Woche Abstand an. Die vollständige Liste der Zeitdifferenzen, geordnet nach den Sonntagsbuchstaben, enthält die Tabelle 6.

Das zusammenfassende Ergebnis beinhaltet der

Satz 7. Die Ostersonntage mit sieben Epakten und mit gleichem Tagesbuchstaben gehen durch sechs Jahresdifferenzen zur Gänze auseinander hervor.

Nun lassen sich alle Osterdaten aus einem einzigen herleiten, etwa aus dem 23. April 2000. Die zugehörige elementare Osterdatenkette findet man wie im Beispiel 13. Dann ermöglicht die Formel (31) in Verbindung mit (6), (8), (28) und (29) die Angabe aller Jahresdifferenzen.

Tabelle 6. Der fundamentale Zusammenhang der Ostersonntage mit sieben Epakten und mit gleichem Tagesbuchstaben

	A	B	C	D	E	F	G
I	2A	3A	28M	29M	30M	31M	1A
II	9A	10A	4A	5A	6A	7A	8A
III	16A	17A	11A	12A	13A	14A	15A
IV					20A		

$\Delta J = 190000$: I – II, II – III , III – IV
$\Delta J = 380000$: I – III, II – IV
$\Delta J = 570000$: I – IV
$\Delta J = 5130000$: IV – I
$\Delta J = 5320000$: III – I, IV – II
$\Delta J = 5510000$: II – I, III – II, IV – III

Literatur

[1] Bachmann, H.: Kalenderarithmetik. 2. Auflage, Juris, Zürich 1986.
[2] Matzka, W.: Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange. Friedrich Beck, Wien 1844.
[3] Oswalden, M.: Die Gregorianische Osterperiode von 5700000 Jahren Länge. Der Sternenbote, **23**, 74–77 (1980).
[4] Oswalden, M.: Die Gregorianische Osterperiode von 5700000 Jahren Länge – ohne Computer berechnet. Der Sternenbote, **25**, 58–63 (1982).
[5] Oswalden, M.: Nogmals de Paasdatum. Maandblad Heelal, Brüssel; Vol. 25, Nr. 10, Okt. 1980.
[6] Schram, R.: Über die Construction und Einrichtung des christlichen Kalenders. Astronomischer Kalender für 1900, herausgegeben von der k. k. Sternwarte zu Wien, S. 118–154.

Anschrift des Verfassers: OStR. Prof. i R. Mag. Manfred Oswalden, Weidling, Feldergasse 55, A-3400 Klosterneuburg.