

Zur Konstruktion der Apollonischen Berührkreise im Isotropen

Von

J. Tölke

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 15. Oktober 1998
durch das k. M. Hellmuth Stachel)

Einleitung

In der isotropen Ebene I_2 betrachten wir die von drei verschiedenen parabolischen Kreisen, von denen sich keine zwei hyperoskulieren, gebildete Menge \mathbf{M} . Vermöge der Potenzgeraden der Kreistripel ergibt sich eine Klasseneinteilung von \mathbf{M} . Diese ist invariant bezüglich der I_2 zugrundeliegenden Bewegungsgruppe \mathbf{B}_3 .

Das Apollonische Berührproblem für die Kreistripelklassen mit parallelen Potenzgeraden wurde für isotrope bzw. nicht isotrope Richtung in [5] bzw. im wesentlichen in [6] behandelt. Zu den dort untersuchten Kreistripeln kommen noch jene hinzu, für welche (a) die Tripelkreise paarweise inkongruent sind und sich genau zwei Tripelkreise berühren, und (b) die Kreistripel mit gemeinsamer Potenzgeraden. Im Falle (a) hyperoskuliert der Berührkreis einen Tripelkreis. Für die Kreistripel (b) sind die Lösungen bzw. Nichtlösungen des Apollonischen Berührproblems evident.

Somit steht eine konstruktive Behandlung jener Kreistripelklasse $M \in \mathbf{M}$ aus, deren Tripelkreise ein *eindeutig bestimmtes Potenzzentrum* $P \in I_2$ besitzen. Wir geben zunächst eine explizite Darstellung für die Radien möglicher Berührkreise an. Über sie gewinnen wir ein *geometrisches* Entscheidungsmerkmal für die Existenz von hyperoskulierenden und

nicht hyperoskulierenden Berührungskreisen. Letztere heißen bekanntlich die *Apollonischen Berührungskreise* des Kreistripels.

Die hiermit gleichzeitig gewonnene Konstruktion der Berührungskreise ist dual zu einer von J. Lang [1, S.10] angedeuteten Konstruktionsmöglichkeit und basiert auf dem *Potenzzentrum* und der dazu metrisch dualen *Ähnlichkeitsachse* des Kreistripels.

1. Die analytische Darstellung der Berührungskreise

1. Für die Kreise K_i, K_j, K_k der Kreistripel der Klasse M gilt ($l = i, j, k$)

$$y = R_l x^2 + \alpha_l x + \beta_l \quad \text{mit} \quad R_l \neq 0 \quad \text{und} \\ (R_i - R_j)(R_i - R_k)(R_j - R_k) \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad R_i = R_j, R_k \neq R_i, \\ \alpha_i \neq \alpha_j \quad \text{und} \quad I \neq 0. \quad (1.1)$$

Hierbei haben wir abkürzend gesetzt

$$\begin{aligned} \text{I} &:= \alpha_i(R_j - R_k) + \alpha_j(R_k - R_i) + \alpha_k(R_i - R_j), \\ \text{II} &:= \beta_i R_i(R_j - R_k) + \beta_j R_j(R_k - R_i) + \beta_k R_k(R_i - R_j), \\ \text{III} &:= \beta_i(R_j - R_k) + \beta_j(R_k - R_i) + \beta_k(R_i - R_j), \\ \text{IV} &:= 4\text{II} + \alpha_i^2(R_j - R_k) + \alpha_j^2(R_k - R_i) + \alpha_k^2(R_i - R_j). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Die *Potenzachsen* p_{mn} der Tripelkreise K_m, K_n

$$(R_m - R_n)y + (\alpha_m R_n - \alpha_n R_m)x + \beta_m R_n - \beta_n R_m = 0 \quad (1.3)$$

schneiden sich im *Potenzzentrum* $P = (x_P, y_P)$ mit

$$\begin{aligned} I x_P = -\text{III}, \quad I y_P = \beta_i(\alpha_j R_k - \alpha_k R_j) + \beta_j(\alpha_k R_i - \alpha_i R_k) \\ + \beta_k(\alpha_i R_j - \alpha_j R_i). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Auf Grund der in der isotropen Ebene I_2 herrschenden metrischen Dualität ist die *Punktpotenz* $\mathbf{p}(P, K)$ eines Punktes $P \in I_2$ bezüglich eines parabolischen Kreises K dual zum Begriff der *Geradenpotenz* $\mathbf{P}(a, K)$ einer nicht isotropen Punktreihe a bezüglich K als Klassenkurve. Der Potenzgeraden p_{mn} zweier Kreise K_m, K_n entspricht dual das *Ähnlichkeitszentrum* A_{mn} . Sind K_m und K_n inkongruent, so gilt für $A_{mn} = (a_{mn}, b_{mn})$ mit

$$a_{mn} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha_m - \alpha_n}{R_m - R_n}, \quad b_{mn} = -\frac{1}{4} \frac{\alpha_m^2 - \alpha_n^2}{R_m - R_n} + \frac{\beta_m R_m - \beta_n R_n}{R_m - R_n}. \quad (1.5)$$

Sind K_m und K_n von (1.1) kongruent, so ist das Ähnlichkeitszentrum der Fernpunkt $\{0 : 1 : \frac{1}{2}(\alpha_m + \alpha_n) - 2R_n(\beta_m - \beta_n/\alpha_m - \alpha_n)\}$ der gemeinsamen Tangente.

Nach Voraussetzung ist jedem Kreistripel der Klasse M sowohl genau ein Punkt $P \in I_2$, das *Potenzzentrum*, mit $\mathbf{p}(P, K_i) = \mathbf{p}(P, K_j) = \mathbf{p}(P, K_k)$ als auch genau eine nicht isotrope Punktreihe a , die *Ähnlichkeitsachse*, mit $\mathbf{P}(a, K_i) = \mathbf{P}(a, K_j) = \mathbf{P}(a, K_k)$ zugeordnet. Für die Ähnlichkeitsachse a der Tripels (1.1) gilt

$$a(x, y) \equiv y - Ax - B = 0 \quad \text{mit} \quad 2I \ A := IV$$

und

$$4IB := (\alpha_i - \alpha_j)(\alpha_i - \alpha_k)(\alpha_j - \alpha_k) - 4\{\beta_j R_i(\alpha_j - \alpha_k) + \beta_j R_j(\alpha_k - \alpha_i) + \beta_k R_k(\alpha_i - \alpha_j)\}. \quad (1.6)$$

2. Unter einem Gleichwinkelkreis K

$$y = Rx^2 + \alpha x + \beta \quad (1.7)$$

der Kreise (1.1) verstehen wir einen Kreis, der alle Tripelkreise unter gleichem Winkel schneidet. Zu diesen Gleichwinkelkreisen gehören auch die zu bestimmenden Berührungskreise von (1.1). Nach [2, S. 42] muß also mit

$$\varphi^2(K, K_l) := (\alpha - \alpha_l)^2 - 4(R - R_l)(\beta - \beta_l) \quad (1.8)$$

$\varphi^2(K, K_i) = \varphi^2(K, K_j) = \varphi^2(K, K_k)$ gelten. Fassen wir hierin R als Parameter auf, so folgt

$$\alpha = A - 2R\alpha_P, \beta = B - \frac{R}{I} \{(\alpha_i - \alpha_k)(\beta_j - \beta_k) - (\alpha_j - \alpha_k)(\beta_i - \beta_k)\}. \quad (1.9)$$

Wir wollen den rechten Summanden im Ausdruck β umformen. Bezeichnet

$$x_B, x_B^* = -x_B + 2x_P \quad (1.10)$$

die gemeinsamen Abszissen der Berührungspunkte der Tangenten an K_l durch P , so gilt nach der *Potenzformel* [2, S. 38f]

$$\mathbf{p}(P, K_l) - x_P^2 = (x_B - x_P)^2 - x_P^2 = \frac{1}{R_l}(-y_P + \alpha_l x_P + \beta_l),$$

$$l = i, j, k \quad (1.11)$$

und man verifiziert

$$\frac{1}{R_l}(-y_P + \alpha_l x_P + \beta_l) = \frac{1}{I} \{ (\alpha_i - \alpha_k)(\beta_j - \beta_k) - (\alpha_j - \alpha_k)(\beta_i - \beta_k) \}. \quad (1.12)$$

Damit folgt als *Darstellung der Gleichwinkelkreise*

$$y - Ax - B - R(x - x_B)(x - x_B^*) = 0. \quad (1.7')$$

Alle Gleichwinkelkreise gehen also durch die auf der Ähnlichkeitsachse von den isotropen Geraden¹ $x = x_B$ und $x = x_B^*$ ausgeschnittenen Punkte.

Für die Radien R der *Berührkreise* des Tripels (1.1) gilt nach (1.8) und (1.9)

$$\begin{aligned} [A - 2Rx_P - \alpha_l]^2 - 4(R - R_l)[B - Rx_B(x_B - 2x_P) - \beta_l] &= 0, \\ l = i, j, k. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Um zu sehen und zum Ausdruck zu bringen, daß (1.12) gegenüber der isotropen Bewegungsgruppe \mathbf{B}_3 invariant ist, verwenden wir den *isotropen Abstand* $\mathbf{d}(P, a)$ [4, S.504] des Potenzentrums P von der Ähnlichkeitsachse a

$$\mathbf{d}(P, a) := a(x_P, y_P). \quad (1.13)$$

Hiermit schreibt sich (1.11) in der Form

$$\mathbf{d}(P, a) = R_l x_B x_B^* - x_P(A - \alpha_l) + \beta_l - B. \quad (1.14)$$

Mit der *Geradenpotenz* $\mathbf{P}(a, K_i) = \mathbf{P}(a, K_j) = \mathbf{P}(a, K_k)$ der Ähnlichkeitsachse a [2, S. 49]

$$\mathbf{P}(a, K_l) := (A - \alpha_l)^2 + 4R_l(B - \beta_l), \quad l = i, j, k \quad (1.15)$$

folgt dann für die Radien R der Berührkreise des Tripels (1.1) die gesuchte *invariante Darstellung*

$$4\mathbf{p}(P, K_l) \cdot R^2 + 4\mathbf{d}(P, a) \cdot R + \mathbf{P}(a, K_l) = 0. \quad (1.16)$$

Satz 1. Für die Radien R der Berührkreise eines Kreistripels (1.1) gilt die quadratische Gleichung (1.16). Darin bedeutet $\mathbf{p}(P, K_l)$ bzw. $\mathbf{P}(a, K_l)$ die Punkt- bzw. Geradenpotenz des Potenzentrums P bzw. der Ähnlichkeitsachse a bezüglich der Tripelkreise K_l und $\mathbf{d}(P, a)$ den isotropen Abstand

¹Diese beiden isotropen Geraden sind also das Analogon des (euklidischen) *Hauptkreises* [3, S. 258f].

des Punktes P von der Geraden a . Die R-Lösungen von (1.16) bestimmen die Berührungskreise gemäß

$$y - Ax - B - R\{(x - x_P)^2 - \mathbf{p}(P, K_l)\} = 0, \quad (1.7'')$$

worin $y - Ax - B = 0$ die Darstellung der Ähnlichkeitsachse a ist.

Diese explizite Darstellung für den Radius R der Berührungskreise ergänzt zum einen die Untersuchungen von J. Lang [1, Satz 8] und H. Sachs [2, Satz 4.6] — sie geben nur Aussagen über die Lösungsanzahl von R — und ermöglicht zum anderen detaillierte Aussagen über die Abhängigkeit der Berührungskreise von der gegenseitigen Lage der Tripelkreise. Dies gilt auch unter Einschluß des einen Tripelkreis hyperoskulierenden Berührungskreises. Um Mißverständnisse zu vermeiden, geben wir die

Definition. Unter einem *Apollonischen Berührungskreis* eines Kreistripels von parabolischen Kreisen versteht man einen von den Tripelkreisen verschie-

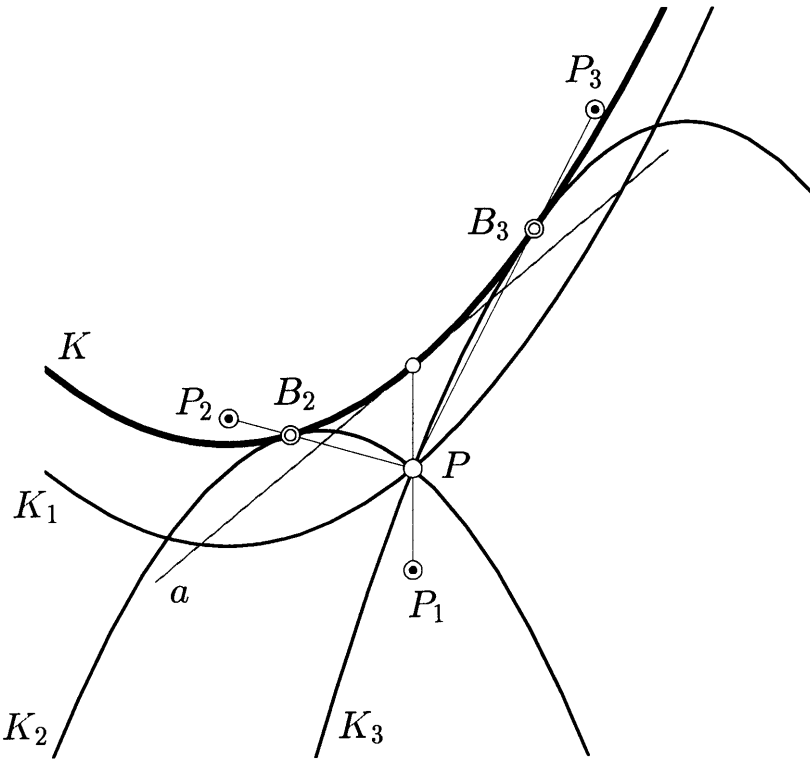


Abb. 1. Beispiel eines Kreistripels mit genau einem Berührungskreis; dieser ist ein hyperoskulierender Apollonischer Berührungskreis

denen Kreis, der alle Tripelkreise berührt, aber keinen hyperoskuliert. Lassen wir Hyperoskulation zu, so sprechen wir von einem *hyperoskulierenden* Apollonischen Berührkreis.

2. Eigenschaften der Berührkreise und Existenzaussagen

1. Ein Berührkreis des Tripels (1.1) ist also entweder ein Apollonischer oder ein hyperoskulierender Apollonischer Berührkreis. Untersuchen wir zunächst, was diese Unterscheidung für das Kreistripel (1.1) bedeutet.

Die Koeffizienten von (1.16) sind nicht unabhängig voneinander! Bezeichnet $P_l = (x_l, y_l)$ den Pol der Ähnlichkeitsachse am Tripelkreis K_l , also

$$A = 2R_l x_l + \alpha_l, \quad y_l = \alpha_l x_l + 2\beta_l - B, \quad (2.1)$$

so gilt nach (1.14) und (1.15)

$$4\mathbf{p}(P, K_l)R_l^2 + 4\mathbf{d}(P, a)R_l + \mathbf{p}(a, K_l) = 4R_l^2 d^2(P, P_l), \quad (1.15')$$

wobei $d(S, T)$ den isotropen Abstand der Punkte S, T bezeichnet. Also gilt: Existiert ein Berührkreis des Tripels (1.1), so ist er genau für P_l parallel zu $P(P_l \parallel P)$ ein hyperoskulierender Berührkreis. Zur Gewinnung schärferer Aussagen benötigen wir

Lemma 1. *Die Ähnlichkeitsachse eines Kreistripels (1.1) ist genau dann die Polare des Potenzzentrums am Tripelkreis K_b , wenn K_l die beiden anderen Tripelkreise berührt.*

Beweis: Bezeichne (u, v, w) eine gerade Permutation von (i, j, k) . Dann gilt nach (1.2)

$$IV - 4II - 2\alpha_u I = (\alpha_u - \alpha_v)^2 (R_w - R_u) + (\alpha_u - \alpha_w)^2 (R_u - R_v) \quad (2.2)$$

und

$$II + R_u III = -(\beta_v - \beta_w)(R_u - R_v)(R_u - R_w).$$

Also folgt

$$4IR_u(x_u - x_p) = \varphi^2(K_u, K_w)(R_u - R_v) - \varphi^2(K_u, K_v)(R_u - R_w) \quad (2.3)$$

und

$$4I(y_p - y_u - \alpha_u(x_p - x_u)) = \varphi^2(K_u, K_w)(\alpha_u - \alpha_v) - \varphi^2(K_u, K_v)(\alpha_u - \alpha_w), \quad (2.4)$$

woraus sich mit $I \neq 0$ die Behauptung ergibt. ■

Bemerkung 1. In (1.16) können wegen $I \neq 0$ nicht alle Koeffizienten gleichzeitig verschwinden. Also gibt es im Falle $\mathbf{p}(P, K_l) = \mathbf{d}(P, a) = 0$ keinen Berührkreis. Geometrisch bedeutet dies, daß die Tripelkreise einem parabolischen Kreisbündel angehören und sich genau zwei Tripelkreise berühren.

Satz 2. Berührt ein Kreis eines Tripels (1, 1) die beiden anderen Tripelkreise, so hat das Tripel keinen Berührkreis.

In der Menge der Kreistripel (1.1), für die nicht $\mathbf{p}(P, K_l) = \mathbf{d}(P, a) = 0$ gilt, sind die hyperoskulierenden Apollonischen Berührkreise somit durch

$$P \parallel P_l \quad \text{und} \quad P \neq P_l \tag{2.5}$$

charakterisiert. Da für das Kreistripel (1.1) mit $R_i = R_j$ nach (2.3)

$$P_i \nparallel P \nparallel P_j \tag{2.6}$$

gilt, kann für dieses Tripel die Bedingung (2.5) höchstens für $l = k$ gelten. Für den anderen Tripeltyp von (1.1) kann (2.5) wegen $I \neq 0$ höchstens für zwei $m, n \in \{i, j, k\}$ eintreten.

Wir formulieren den

Existenzsatz. Bezeichne M_0 die Menge der Kreistripel (1.1), für welche $\mathbf{p}(P, K)$ und $\mathbf{d}(P, a)$ nicht gleichzeitig verschwinden. Dann existieren für

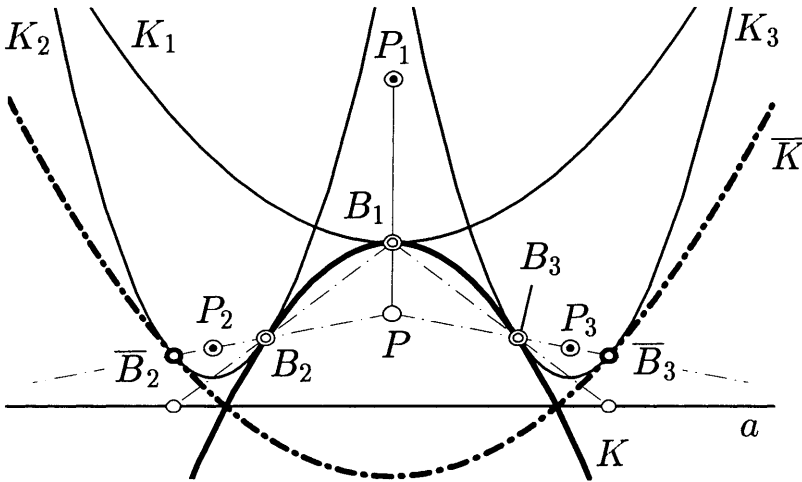


Abb. 2. Beispiel eines Kreistripels mit einem Apollonischen und einem hyperoskulierenden Apollonischen Berührkreis

jedes Tripel von M_0 mit $P \nparallel P_i, P_j, P_k$ genau so viele verschiedene Apollonische Berührungskreise wie es verschiedene Lösungen R von (1.16) gibt.

Da R nach (1.7'') den Berührungskreis eindeutig bestimmt, folgt

Satz 3. Hat ein Kreistripel (1.1) zwei verschiedene Berührungskreise K, \bar{K} , so sind diese inkongruent und können sich nicht berühren.

Denn sind R, \bar{R} die Radien von K, \bar{K} , so gilt

$$\varphi^2(K, \bar{K}) = 4(R - \bar{R})^2 \mathbf{p}(P, K_l). \quad (2.7)$$

Satz 4. hat ein Kreistripel (1.1) zwei verschiedene parabolische Berührungskreise K, \bar{K} , so ist das Potenzzentrum P bzw. die Ähnlichkeitsachse a des Tripels ihr Ähnlichkeitszentrum bzw. ihre Potenzachse.

Beweis: Bezeichnet R, \bar{R} die bezüglichlichen Radien von K, \bar{K} , so gilt nach (1.16): $\mathbf{p}(P, K_l)(R + \bar{R}) + \mathbf{d}(P, a) = 0$. Wegen $R\bar{R} \neq 0$ ist das Ähnlichkeitszentrum der Kreise K, \bar{K} definiert und wegen (1.9) und (1.11) nach (1.5) gleich dem Potenzzentrum P . Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus (1.3). ■

2. Bei der Diskussion von (1.16) kommt es auf das Verhalten der Diskriminante

$$\Delta := \mathbf{d}^2(P, a) - \mathbf{p}(P, K_l)\mathbf{p}(a, K_l) \quad (2.8)$$

an. Setzen wir in (2.8, Rechts) die bezüglichlichen Bedeutungen ein, so folgt

$$\begin{aligned} \Delta &= [\mathbf{d}(P, a) - 2R_l(x_B - x_P)(x_l - x_B)][\mathbf{d}(P, a) \\ &\quad + 2R_l(x_B - x_P)(x_l - x_B^*)]. \end{aligned} \quad (2.8')$$

Lemma 2. Ist das Ähnlichkeitszentrum der Kreise K_m, K_n eines Kreistripels (1.1) zu einem der Tangentenberührungspunkte vom Potenzzentrum an die Tripelkreise K_m, K_n parallel, so berühren sich K_m und K_n .

Beweis: Damit die Voraussetzung erfüllbar ist, muß im Fall $R_i = R_j$ des Tripels (1.1) o.B.d.A. $m = k$ sein. Nach (1.14) gilt

$$\beta_m - \beta_n + (R_m - R_n)x_B x_B^* + (\alpha_m - \alpha_n)x_P = 0. \quad (2.9)$$

Gilt dann mit (1.5) $x_B = a_{mm}$ bzw. $x_B^* = a_{nn}$, so folgt

$$0 = \beta_m - \beta_n - (R_m - R_n)a_{mn}^2 = -\frac{1}{4} \frac{\varphi^2(K_m, K_n)}{R_m - R_n}. \quad \blacksquare$$

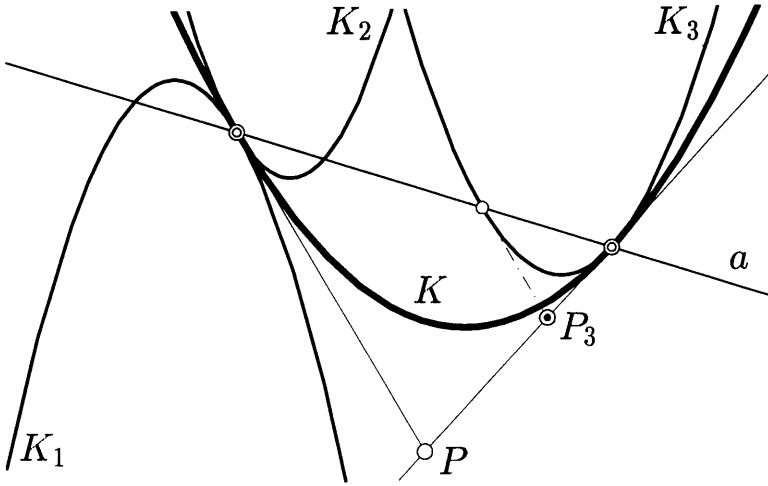


Abb. 3. Beispiel eines Kreistripels mit genau einem parabolischen Apollonischen Berührungskreis ($\Delta = 0$)

Satz 5. Ein Kreistripel (1.1) mit $\mathbf{p}(P, K_l) \neq 0$ und $\Delta = 0$ hat keinen hyperoskulierenden Apollonischen Berührungskreis.

Beweis: Antithese: $R = R_l$ sei der Radius eines hyperoskulierenden Berührungskreises. Wegen $\Delta = 0$ gilt also, wenn wir o.B.d.A. wegen (2.6) $l = k$ annehmen, $\mathbf{d}(P, a) + 2R_k(x_B - x_P)^2 = 0$. Berücksichtigen wir dies in (2.8') für $l = i, j$, so folgt

$$x_B = a_{ik} \quad \text{oder} \quad x_B^* = a_{ik} \quad \text{und} \quad x_B = a_{jk} \quad \text{oder} \quad x_B^* = a_{jk}.$$

Wegen $I \neq 0$ gilt also o.B.d.A. $x_B = a_{ik}$ und $x_B^* = a_{jk}$. Nach Lemma 2 berührt K_k die Kreise K_i und K_j . Dies steht im Widerspruch zu Satz 2. ■

3. Konstruktionslemmata

Lemma 3. *Besitzt ein Kreistripel (1.1) einen parabolischen Berührungskreis K , der zum Tripelkreis K_l inkongruent ist, so sind die Punkte P, P_l und der Berührungspunkt B_l von K und K_l kollinear.*

Beweis: Nach Voraussetzung gilt für den Radius R von K : $R(R - R_l) \neq 0$. Mit (1.7') und (2.1) folgt für $B_l = (a_l, b_l)$

$$a_l - x_l = R \frac{x_l - x_P}{R_l - R}, \quad b_l = R_l a_l^2 + \alpha_l a_l + \beta_l. \quad (3.1)$$

Ist $B_l \parallel P_l$, so ist B_l mit P_l, P kollinear. Für $B_l \dashv\vdash P_l$ berechnen wir

$$\frac{b_l - y_l}{a_l - x_l} = A + R_l(a_l - x_l) + \frac{\mathbf{P}(a, K_l)}{4R_l(a_l - x_l)} \quad (3.2)$$

und

$$\frac{y_P - y_l}{x_P - x_l} = A + \frac{\mathbf{d}(P, a)}{x_P - x_l} + \frac{\mathbf{P}(a, K_l)}{2R_l(x_P - x_l)}.$$

Also sind P, P_l, B_l genau dann kollinear, wenn die zu (1.16) mit (1.15') folgende äquivalente Relation

$$(R - R_l)[(R + R_l)\mathbf{p}(P, K_l) + \mathbf{d}(P, a)] + R_l^2(x_l - x_P)^2 = 0 \quad (3.3)$$

gilt. ■

Bemerkung 2. Damit sind die Berührungspunkte eines Kreistripels (1.1) mit $\mathbf{p}(P, K_l) = 0$, also auch der zugehörige Berührkreis K konstruierbar. Wegen $x_B = x_B^* = x_P$ berührt K die Ähnlichkeitsachse des Kreistripels (s. Abb. 1).

Lemma 4. Für ein Kreistripel mit (1.1) sei $\mathbf{p}(P, K_l) \neq 0$. Ist dann der Pol P_m der Ähnlichkeitsachse am Tripelkreis K_m nicht zum Potenzzentrum P parallel, so ist die Gerade PP_m genau für $\Delta = 0$ Tangente des Kreises K_m .

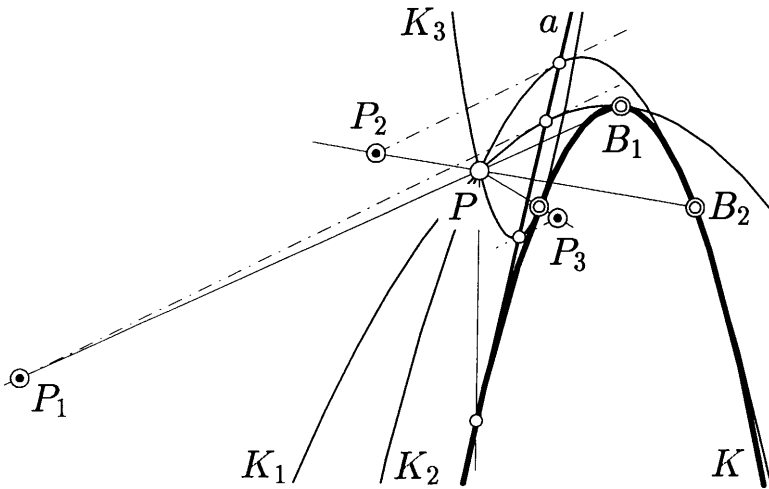


Abb. 4. Beispiel eines Kreistripels mit $\mathbf{p}(P, K_l) = 0$ und einem Apollonischen Berührkreis

Beweis: Nach Voraussetzung existiert die nicht isotrope Gerade PP_m . Aus (1.14') folgt

$$\frac{y_m - y_P}{x_m - x_P} = 2R_m x_B + \alpha_m + \frac{\mathbf{d}(P, a) - 2R_m(x_B - x_P)(x_m - x_B)}{x_m - x_P}$$

und äquivalent

$$\frac{y_m - y_P}{x_m - x_P} = 2R_m x_B^* + \alpha_m + \frac{\mathbf{d}(P, a) + 2R_m(x_B - x_P)(x_m - x_B^*)}{x_m - x_P}$$

Mit den Berührungspunkten $T_m = (x_B, y_m^t)$ bzw. $T_m^* = (x_B^*, y_m^{*t})$ der Tangenten von P an K_m gilt

$$\frac{y_m^t - y_P}{x_B - x_P} = 2R_m x_B + \alpha_m \quad \text{bzw.} \quad \frac{y_m^{*t} - y_P}{x_B - x_P} = 2R_m x_B^* + \alpha_m,$$

sodaß die Behauptung aus (2.8') folgt.

Satz 6. Für ein Kreistripel mit (1.1) und $\mathbf{p}(P, K_l) \neq 0$ berühren sich dann und nur dann genau zwei Tripelkreise, wenn $\Delta = 0$ und für $l = i, j, k$ $P \not\parallel P_l$ gilt.

Beweis: (a) Es gelte $\Delta = 0$ und $P \not\parallel P_l$. Dann können in (2.8') für kein l beide Faktoren gleichzeitig verschwinden. Also folgt für *zwei* $l \in \{i, j, k\}$ entweder

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(P, a) - 2R_l(x_B - x_P)(x_l - x_B) &= 0 \quad \text{oder} \\ \mathbf{d}(P, a) + 2R_l(x_B - x_P)(x_l - x_B^*) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Also folgt für $m, n \in \{i, j, k\}$ entweder

$$\begin{aligned} \alpha_m - \alpha_n + 2(R_m - R_n)x_B &= 0 \quad \text{oder} \\ \alpha_m - \alpha_n + 2(R_m - R_n)x_B^* &= 0. \end{aligned}$$

Wegen $I \neq 0$ gilt dies für genau zwei $m, n \in \{i, j, k\}$, $m \neq n$. Wir haben $x_B = a_{mn}$ oder $x_B^* = a_{mn}$, also nach Lemma 2 $\varphi^2(K_m, K_n) = 0$. Lemma 1 liefert die Behauptung.

(b1) O.B.d.A. gelte $\varphi^2(K_m, K_n) = 0$. Mit den Berührungspunkten T_l, T_l^* (s. Lemma 4) gilt wegen $\mathbf{p}(P, K_l) \neq 0$ entweder $A_{mn} = T_m = T_n$ oder $A_{mn} = T_m^* = T_n^*$:

$$b_{mn} = Aa_{mn} + B = R_n a_{mn}^2 + \alpha_n a_{mn} + \beta_n.$$

Setzen wir in die Potenzformel $x_B = a_{mn}$ bzw. $x_B^* = a_{mn}$ ein, so folgt

$$R_n(a_{mn}^2 - 2a_{mn}x_P) = -y_P + \alpha_n x_P + \beta_n$$

und wir berechnen

$$-\mathbf{d}(P, a) = -y_P + Ax_P + B = [A - \alpha_n - 2R_n a_{mn}](x_P - a_{mn}).$$

Also gilt (3.4), d.h. $\Delta = 0$.

(b2) Da sich genau die Kreise K_m, K_n berühren, gilt wegen $\mathbf{p}(P, K_l) \neq 0$: $P_m \parallel P \parallel P_n$. Sei K_l der verbliebene Kreis des Tripels K_l, K_m, K_n . Berücksichtigen wir in

$$4R_l(x_l - x_P) = \varphi^2(K_l, K_m)(R_l - R_n) - \varphi^2(K_l, K_n)(R_l - R_m),$$

daß $\varphi^2(K_m, K_n) = 0$, so folgt: $2(R_m - R_n)(x_l - x_P) = I$. ■

Bemerkung 3. Damit ist im Falle $\mathbf{p}(P, K_l) \neq 0$, $\Delta = 0$ der (nach Satz 5) Apollonische Berührkreis K des Tripels (1.1) konstruierbar. Berühren sich K_m, K_n , so berührt die Gerade PP_l den verbliebenen Tripelkreis K_l im Berührungspunkt B_l mit K . Nach §1 liegt B_l auf der Ähnlichkeitsachse (s. Abb. 3).

Lemma 5. Sei für ein Kreistripel (1.1) K ein parabolischer, zu den Tripelkreisen K_m und K_n inkongruenter Berührkreis. Sind dann seine Berührungspunkte B_m, B_n mit K_m, K_n verschieden, so geht die Verbindungsgerade $B_m B_n$ durch das Ähnlichkeitszentrum A_{mn} .

Denn das Tripel K, K_m, K_n gehört zur Klasse M .

Bemerkung 4. Damit lassen sich die Berührkreise für jene Kreistripel (1.1) mit $\Delta \neq 0$, bei denen für genau ein m : $P \parallel P_m$ und $P \neq P_m$ gilt, konstruieren. Nach Satz 6 (Beweisteil(b1)) sind die Tripelkreise K_l paarweise nicht berührend und erfüllen nach (2.3) die *Schnittwinkelrelation* (o.B.d.A. sei $m = k$)

$$\varphi^2(K_k, K_j)(R_k - R_i) - \varphi^2(K_k, K_i)(R_k - R_j) = 0. \quad (3.5)$$

Ist $\mathbf{P}(a, K_l) = 0$, so ist die Ähnlichkeitsachse der Apollonische Berührkreis. Der hyperoskulierende Apollonische Berührkreis geht nach (1.15'), (1.16) und (1.7'') durch das Potenzzentrum. Die Konstruktion seiner ihn bestimmenden Berührungspunkte erfolgt nach Lemma 3.

Für $\mathbf{P}(a, K_l) \neq 0$ ergeben sich die Berührungspunkte B_l von K_l mit dem Apollonischen Berührkreis K für $l = k$ nach Lemma 3 und für $l = i, j$ nach Lemma 3 und Lemma 5. Die Berührungspunkte \bar{B}_i, \bar{B}_j des hyperoskulierenden Apollonischen Berührkreises \bar{K} mit K_i, K_j sind jedesmal die "Restschnittpunkte" von PP_i, PP_j mit K_i, K_j (s. Abb. 2).

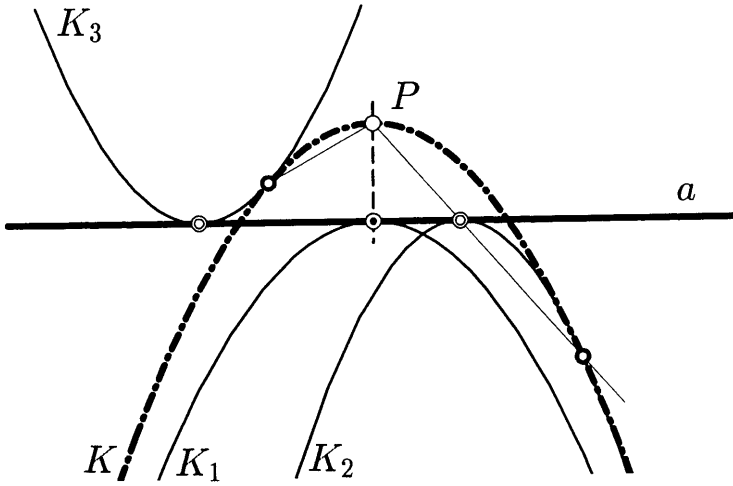


Abb. 5. Beispiel eines Kreistripels mit der Ähnlichkeitsachse als Apollonischem Berührungskreis und einem hyperoskulierenden Apollonischen Berührungskreis

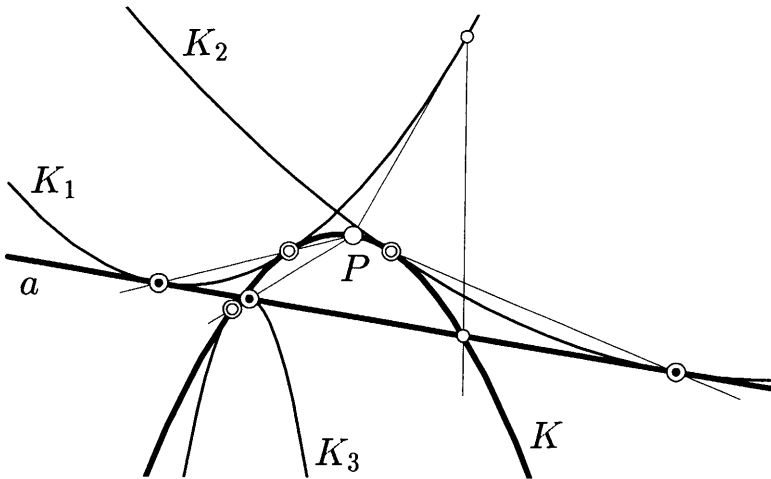


Abb. 6. Beispiel eines Kreistripels mit $\mathbf{P}(a, K_l) = 0$ und einem Apollonischen parabolischen Berührungskreis

Bemerkung 5. Gilt $\mathbf{P}(a, K_l) = 0$ und $P \nparallel P_l$ für alle l , so gibt es neben der Ähnlichkeitsachse auch einen parabolischen Berührungskreis K . Für seinen Radius R gilt: $\mathbf{p}(P, K_l)R + \mathbf{d}(P, a) = 0$. Nach (1.7'') geht K durch das Potenzzentrum P . Damit sind seine Berührungspunkte mit den Tripelkreisen

nach Lemma 3 konstruierbar. Nach (1.7'') ist die Tangente an K in P parallel zur Ähnlichkeitsachse (s. Abb. 6).

4. Die Konstruktion der Berührkreise im allgemeinen Fall

1. Nach den voranstehenden Bemerkungen verbleiben nur noch Kreistripel (1.1) mit

$$p(P, K_l)P(a, K_l) \Delta \neq 0. \tag{4.1}$$

Die quadratische R-Gleichung (1.16) hat nach (4.1) stets verschiedene nicht verschwindende Lösungen. Nach Bemerkung 4 sind somit nur noch die Konstruktionen der Berührkreise in den Fällen

- (a) $P_m \parallel P \parallel P_n$ mit $P_m \neq P \neq P_n$ für genau zwei verschiedene Tripelkreise K_m, K_n ,
- (b) $P_l \nparallel P$ für alle Tripelkreise K_l

zu behandeln.

Der Fall (a) kann nach (2.6) für die Tripel (1.1) mit $R_i = R_j$ nicht eintreten. Für die übrigen Tripel (1.1) bedeutet (a), daß die Kreistripel zwei

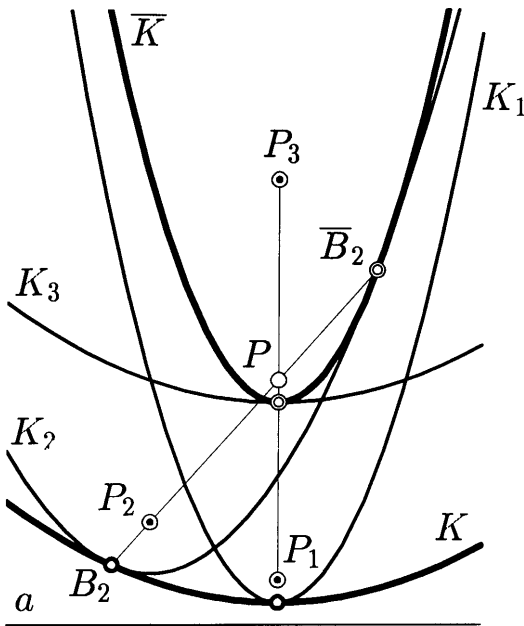


Abb. 7. Beispiel eines Kreistripels mit (4.1) und zwei parabolischen hyperoskulierenden Apollonischen Berührkreisen

Schnittwinkelrelationen analog zu (3.5) erfüllen müssen. Das Kreistripel hat dann zwei parabolische hyperoskulierende Apollonische Berührungskreise K, \bar{K} . Lemma 3 und Lemma 5 liefern die Konstruktion der Berührungspunkte mit K_j, K_k bzw. K_i, K_k ($m = i, n = j$).

2. Im Falle (4.1) mit (b) berühren sich nach Satz 6 keine zwei Tripelkreise. Nach dem Existenzsatz gibt es zwei parabolische inkongruente Apollonische Berührungskreise K, \bar{K} , die per definitionem zu allen Tripelkreisen jeweils inkongruent sind.

Zur Durchführung der Konstruktion von K, \bar{K} bemerken wir vorab, daß die mit (1.5) definierte Abbildung

$$x_j = a_{ij} + \frac{R_i}{R_j}(x_i - a_{ij}), \quad y_j = b_{ij} + \frac{R_i}{R_j}(y_i - b_{ij}) \quad \text{für } R_i \neq R_j \tag{4.2}$$

bzw.

$$x_j = x_i + \frac{\alpha_i - \alpha_j}{2R_{ij}}, \quad y_j = y_i + \frac{\alpha_i^2 - \alpha_j^2}{4R_{ij}} - \beta_i + \beta_j, \quad R_{ij} := R_i = R_j \tag{4.3}$$

eine (spezielle) *winkeltreue isotrope Ähnlichkeit* von I_2 ist. Affin gesprochen ist (4.2) eine Homologie und (4.3) eine Elation. Durch (4.4) bzw. (4.3) werden

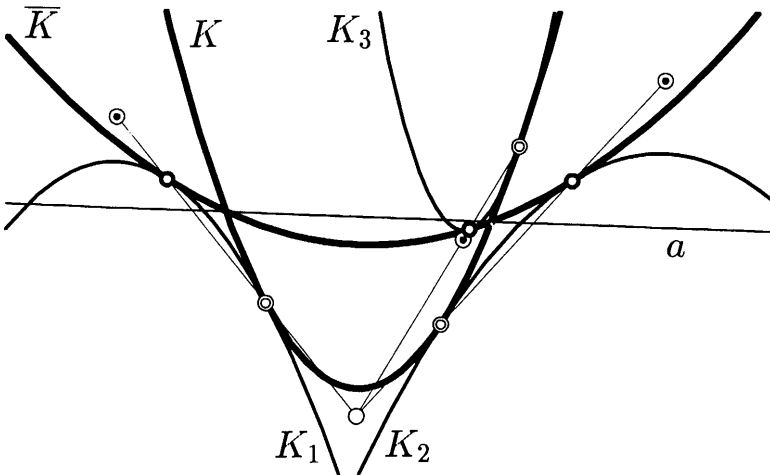


Abb. 8. Beispiel eines Kreistripels mit (4.1) und zwei parabolischen Apollonischen Berührungskreisen

die Punkte $P(x_i, y_i)$ des Tripelkreises K_i auf die Punkte $P(x_j, y_j)$ des Tripelkreises K_j von (1.1) abgebildet. Genau in homologen (elativen) Punkten von K_i und K_j sind die entsprechenden Kreistangenten parallel.

Nach Lemma 4 schneidet die Gerade PP_l den Tripelkreis K_l in zwei verschiedenen Punkten B_l, \bar{B}_l von $I_2(\mathbb{C})$. Diese sind nach Lemma 3 die Berührungspunkte von K, \bar{K} mit K_l . Nach Satz 3 und Satz 6 (Beweisteil (b1)) sind diese sechs Punkte $B_l, \bar{B}_l (l = i, j, k)$ paarweise verschieden.

Zur Zuordnung zu den Kreisen K, \bar{K} sei $B_i \in K$ und $\bar{B}_i \in \bar{K}$ fixiert. Da sich keine Tripelkreise berühren, ist die Gerade $A_{ij}B_i$ bestimmt. Nach Lemma 5 geht sie durch $B_j \in K, K_j$. Liegt auch \bar{B}_j auf $A_{ij}B_i$, so nach Konstruktion auch \bar{B}_i . Dann hat nach obiger Vorbemerkung genau einer der Punkte B_j, \bar{B}_j eine zur Tangente von $B_i \in K_i$ nicht parallele Tangente. Dieser Punkt sei $B_k \in K$. Durch Wiederholung der Schritte bestimmen wir $B_k \in K$. Damit sind die Apollonischen Berührkreise über ihre Berührungspunkte mit den Tripelkreisen konstruktiv bestimmt.

Danksagung

Besonderer Dank meinem Freund Dr. W. Schürer für die Anfertigung der Figuren.

Literatur

- [1] Lang, J.: Zur isotropen Dreiecksgeometrie und zum Apollonischen Berührproblem in der isotropen Ebene. Ber.d.Math.Stat.Sek., Forschungszentrum Graz, Ber. **241**, 1–11 (1983).
- [2] Sachs, H.: Ebene isotrope Geometrie. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg-Verlag, 1987.
- [3] Salmon, G., Fiedler, W.: Analytische Geometrie der Kegelschnitte I. Leipzig: Teubner-Verlag, 1907.
- [4] Strubecker, K.: Zwei Anwendungen der isotropen Dreiecksgeometrie auf ebene Ausgleichsprobleme. Sb. Österr. Ak. Wiss. Math.-Nat. K1.II **192**, 497–559 (1983).
- [5] Tölke, J.: Zu den kongruenten Kreisen eines linearen parabolischen Kreissystems der isotropen Ebene, Sb. Österr. Ak. Wiss. Math.-Nat. K1.II **205**, 153–167 (1996).
- [6] Tölke, J.: Zu den isotropen Kreistripeln mit kongruenten Apollonischen Berührkreisen. Sb. Österr. Ak. Wiss. Math.-Nat. K1.II **206**, 267–277 (1997).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. J. Tölke, Fachbereich 6–Mathematik, Universität Gesamthochschule Siegen, Hölderlinstraße 3, D-57068 Siegen, Deutschland.