

## Seitenstücke der Wallace-Geraden

Von

**O. Giering**

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 12. November 1998  
durch das k. M. Oswald Giering)

### Abstract

If one draws, in an Euclidean plane from a point  $X$  the perpendiculars onto the sides  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  of a triangle  $ABC$  and if the feet of these perpendiculars  $P \in AB$ ,  $Q \in BC$ ,  $R \in CA$  lie on a line – the Wallace line of  $X$  – then  $X$  lies on the circumcircle  $\omega$  of the triangle  $ABC$ . In this paper we investigate not only the collinearity of the feet  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  but also the collinearity of the intersection points  $P' \in BC$ ,  $Q' \in CA$ ,  $R' \in AB$  as well as  $P'' \in CA$ ,  $Q'' \in AB$ ,  $R'' \in BC$  of the three perpendiculars with the other sides of a triangle  $ABC$  (see Fig. 2). It is shown that with regard to  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$  a conic  $\kappa'$  and with regard to  $P''$ ,  $Q''$ ,  $R''$  a conic  $\kappa''$  corresponds to the circumcircle  $\omega$ . The conics  $\kappa'$ ,  $\kappa''$  are of the same affine type and give reason to a new remarkable point  $D$  and two new remarkable lines of a triangle  $ABC$  with central conics resp. hyperbolas  $\kappa'$ ,  $\kappa''$ . The conics  $\kappa'$ ,  $\kappa''$  and the circumcircle  $\omega$  are elements of the same pencil of conics. For equilateral triangles  $ABC$  we get additional results.

### Einleitung

Fällt man in der euklidischen Ebene von einem Punkt  $X$  die Lote auf die Seiten  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  eines Dreiecks  $ABC$  (Abb. 1) und liegen die Lotfußpunkte  $P \in AB$ ,  $Q \in BC$ ,  $R \in CA$  auf einer Geraden – der Wallace-

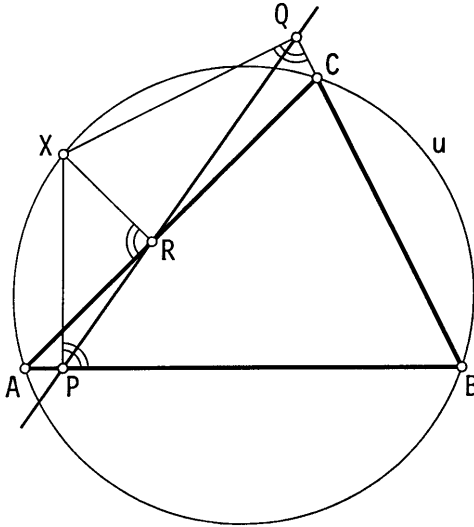


Abb. 1

*Geraden*<sup>1</sup> von  $X$  zum Dreieck  $ABC$  – so liegt  $X$  auf dem Umkreis  $u$  des Dreiecks  $ABC$ <sup>2</sup>. Liegt umgekehrt  $X$  auf  $u$ , so sind  $P, Q, R$  kollinear.

Im folgenden betrachten wir die Schnittpunkte der Lote  $XP, XQ, XR$  mit *sämtlichen Seiten* des Dreiecks  $ABC$ , also die Punkte (Abb. 2):

$$\begin{aligned} P &:= XP \cap AB, & P' &:= XP \cap BC, & P'' &:= XP \cap CA, \\ Q &:= XQ \cap BC, & Q' &:= XQ \cap CA, & Q'' &:= XQ \cap AB, \\ R &:= XR \cap CA, & R' &:= XR \cap AB, & R'' &:= XR \cap BC. \end{aligned} \quad (1)$$

Die Punkte  $P', Q', R'$  liegen nach (1) auf jenen Dreiecksseiten, die bei der *Rechts-Durchlaufung*  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  des Dreiecks  $ABC$  den Seiten, welche die Lotfußpunkte  $P, Q, R$  tragen, unmittelbar folgen. Dasselbe gilt für  $P'', Q'', R''$  bei der *Links-Durchlaufung*  $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$  des Dreiecks  $ABC$ .

Während die Frage nach kollinearen *Lotfußpunkten*  $P, Q, R$  durch den Satz über die Wallace-Geraden geklärt ist, scheint die Frage nach kollinearen *Lotschnittpunkten*  $P', Q', R'$  bzw.  $P'', Q'', R''$  in der Literatur bisher keine Beachtung gefunden zu haben. Wir untersuchen daher die

<sup>1</sup> Nach William Wallace 1797, siehe [5], S. 143; [1], S. 1234; [2], S. 45; [4], S. 855. Dieselbe Gerade tritt in der Literatur auch als Simson-Gerade auf.

<sup>2</sup> Eine affine und eine projektive Verallgemeinerung dieser Aussage findet man in [3]. Die Lotfußpunkte  $P, Q, R$  von  $X$  sind übrigens genau dann kollinear, wenn die Spiegeipunkte von  $X$  an den Dreiecksseiten kollinear sind (zentrische Streckung aus  $X$ !).

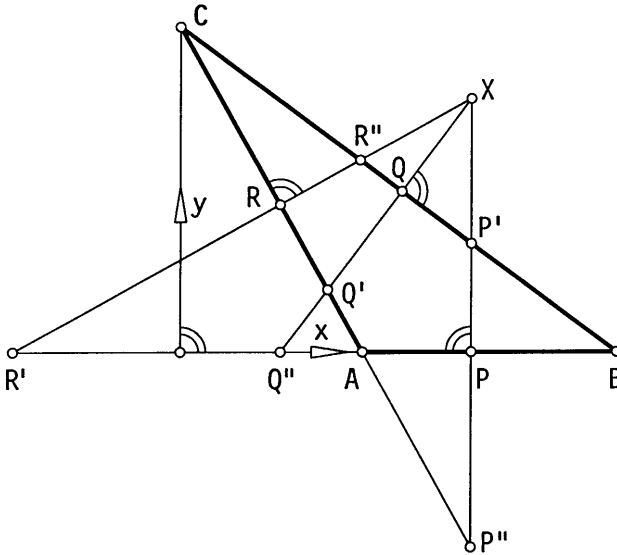


Abb. 2

Kollinearität der Punkte  $P', Q', R'$  sowie der Punkte  $P'', Q'', R''$ . Bei kollinearen Punkten  $P', Q', R'$  nennen wir ihre Trägergerade die *Wallace-Rechtsgerade*  $[P'Q'R']$  des Punktes  $X$  zum Dreieck  $ABC$ , bei kollinearen Punkten  $P'', Q'', R''$  die *Wallace-Linksgerade*  $[P''Q''R'']$  des Punktes  $X$  zum Dreieck  $ABC$ . Wir beweisen darüber die in Satz 1 für allgemeine Dreiecke und die in Satz 2 für gleichseitige Dreiecke zusammengefaßten Aussagen.

### 1. Allgemeine Dreiecke

Wir beziehen das Dreieck  $ABC$  auf das in Abb.2 verwendete kartesische  $x\eta$ -Koordinatensystem und geben den Ecken  $A, B, C$  die Koordinaten  $A(a, 0), B(b, 0), C(0, c)$ . Ohne Einschränkung ist  $a < b, 0 < c$ . Für einen gegebenen Punkt  $X(\xi, \eta)$  berechnet man die Koordinaten der zugehörigen Lotschnittpunkte  $P', Q', R', P'', Q'', R''$ :

$$\begin{aligned}
 P'(x_{P'}, y_{P'}) \quad \text{mit} \quad x_{P'} &= \xi, & y_{P'} &= -\frac{c}{b}(\xi - b), \\
 Q'(x_{Q'}, y_{Q'}) \quad \text{mit} \quad x_{Q'} &= \frac{c^2 + b\xi - c\eta}{c^2 + ab}a, & y_{Q'} &= \frac{ab - b\xi + c\eta}{c^2 + ab}c, \\
 R'(x_{R'}, y_{R'}) \quad \text{mit} \quad x_{R'} &= \xi - \frac{c}{a}\eta, & y_{R'} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 P''(x_{P''}, y_{P''}) & \text{ mit } x_{P''} = \xi, & y_{P''} &= -\frac{c}{a}(\xi - a), \\
 Q''(x_{Q''}, y_{Q''}) & \text{ mit } x_{Q''} = \xi - \frac{c}{b}\eta, & y_{Q''} &= 0, \\
 R''(x_{R''}, y_{R''}) & \text{ mit } x_{R''} = \frac{c^2 + a\xi - c\eta}{c^2 + ab}b, & y_{R''} &= \frac{ab - a\xi + c\eta}{c^2 + ab}c.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Nach (2) und (3) ergeben sich die Koordinaten der Punkte  $P''$ ,  $Q''$ ,  $R''$  in dieser Reihenfolge aus den Koordinaten der Punkte  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$ , indem man  $a$  mit  $b$  vertauscht und  $c$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  beibehält.

Die Lotschnittpunkte  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$  liegen genau dann kollinear (auf der Wallace-Rechtsgeraden von  $X$  zum Dreieck  $ABC$ ), wenn der Inhalt des Dreiecks  $P'Q'R'$  verschwindet, wenn also gilt:

$$\begin{vmatrix} x_{P'} & y_{P'} & 1 \\ x_{Q'} & y_{Q'} & 1 \\ x_{R'} & y_{R'} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Aus (4) folgt mit (2) unter Verwendung von  $T := a^2 - ab + b^2 - c^2$ , daß die Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$  notwendig der Gleichung

$$acx^2 + Txy - by^2 - ac(a+b)x - b(a^2 - c^2)y + a^2bc = 0 \tag{5}$$

genügen müssen. Entsprechend liegen  $P''$ ,  $Q''$ ,  $R''$  genau dann kollinear (auf der Wallace-Linksgeraden von  $X$  zum Dreieck  $ABC$ ), wenn

$$\begin{vmatrix} x_{P''} & y_{P''} & 1 \\ x_{Q''} & y_{Q''} & 1 \\ x_{R''} & y_{R''} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Daraus folgt, daß die Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$  notwendig die Gleichung

$$bcx^2 + Txy - cy^2 - bc(a+b)x - a(b^2 - c^2)y + ab^2c = 0 \tag{7}$$

erfüllen müssen. Man zeigt unschwer die Umkehrung: Liegt  $X$  auf dem durch (5) gegebenen Kegelschnitt  $k'$  bzw. auf dem durch (7) gegebenen Kegelschnitt  $k''$ , so liegen  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$  bzw.  $P''$ ,  $Q''$ ,  $R''$  kollinear. Wir nennen  $k'$  den *Rechtskegelschnitt* und  $k''$  den *Linkskegelschnitt* des Dreiecks  $ABC$ <sup>3</sup>. Man verifiziert unmittelbar, daß die Dreiecksecken  $A, B, C$  sowohl auf  $k'$  als auch auf  $k''$  liegen (Abb. 3).

<sup>3</sup>Ersichtlich liefert eine Kollinearitätsbedingung (4) bzw. (6) als Ort der Punkte  $X(\xi, \eta)$  stets einen Kegelschnitt, wenn die in (4) bzw. (6) auftretenden Koordinaten lineare Funktionen von  $\xi$  und  $\eta$  sind.

Schneidet man (nach projektiver Erweiterung der euklidischen Ebene) den Rechtskegelschnitt  $k'$  und den Linkskegelschnitt  $k''$  mit der Ferngeraden, so zeigt sich, daß die Fernpunkte dieser Kegelschnitte festgelegt sind durch

$$x : y = (-T \pm \sqrt{T^2 + 4abc^2}) : 2pc \text{ mit } p = a \text{ für } k', p = b \text{ für } k''. \quad (8)$$

Nach (8) handelt es sich bei nichtzerfallenden Kegelschnitten  $k'$  und  $k''$  stets um *Kegelschnitte gleichen Typs* und zwar um eine *Ellipse* (oder einen Kreis), eine *Parabel* bzw. eine *Hyperbel*, je nachdem

$$T^2 + 4abc^2 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0. \quad (9)$$

Beachtet man, daß gilt:

$0 < a < b$  für jedes stumpfwinklige Dreieck  $ABC$  (ohne Einschränkung stumpfwinklig bei  $A$ ),

$a = 0$  für jedes rechtwinklige Dreieck  $ABC$  (ohne Einschränkung rechtwinklig bei  $A$ ),

$a < 0 < b$  für jedes spitzwinklige Dreieck,

so folgt aus (8) und (9): Für jedes stumpfwinklige Dreieck  $ABC$  sind die Kegelschnitte  $k'$  und  $k''$  Hyperbeln (Abb. 3). Für jedes rechtwinklige Dreieck  $ABC$  zerfallen  $k'$  und  $k''$  wegen  $a = 0$  in ein Geradenpaar.<sup>4</sup> Für ein spitzwinkliges Dreieck  $ABC$  sind als Kegelschnitte  $k'$  und  $k''$  Ellipsen, Parabeln<sup>5</sup> und Hyperbeln möglich.

Sind  $k', k''$  *Mittelpunktskegelschnitte* mit den Mittelpunkten  $M'(\xi', \eta'), M''(\xi'', \eta'')$ , so findet man als Koordinaten:

$$\xi' = \frac{b(a^2 - c^2)T + 2abc^2(a + b)}{T^2 + 4abc^2}, \quad \eta' = \frac{ac(a + b)T - 2abc(a^2 - c^2)}{T^2 + 4abc^2}, \quad (10)$$

$$\xi'' = \frac{a(b^2 - c^2)T + 2abc^2(a + b)}{T^2 + 4abc^2}, \quad \eta'' = \frac{bc(a + b)T - 2abc(b^2 - c^2)}{T^2 + 4abc^2}. \quad (11)$$

<sup>4</sup>Untersucht man allgemein den Zerfall von  $k'$  und  $k''$ , so stellt sich einheitlich für beide Kegelschnitte neben  $a = 0$  die Bedingung  $c^2 = -ab$  ein, also erneut ein *rechtwinkliges Dreieck*  $ABC$ , lediglich rechtwinklig bei  $C$ .

<sup>5</sup>Wir verzichten auf eine detaillierte Diskussion des Parabel-Falles, die sich bei der Auswertung von  $T^2 + 4abc^2 = 0$  (siehe (9)) leicht durchführen läßt.

Werden  $k', k''$  aus dem  $xy$ -Koordinatensystem in ein  $x^*y^*$ -Koordinatensystem auf Hauptachsen transformiert und wird dabei die  $x$ - in die  $x^*$ -Achse um den Winkel  $\psi$  gedreht, so ergibt sich für *beide* Kegelschnitte  $k', k''$ :

$$\tan 2\psi = \frac{T}{(a+b)c}. \tag{12}$$

Man entnimmt aus (12), daß die Kegelschnitte  $k', k''$  *parallele Achsen* besitzen (Abb. 3). Das von den Achsen der Kegelschnitte  $k', k''$  definierte Rechteck besitzt die Mittelpunkte  $M', M''$  als Gegenecken. Die beiden andern Gegenecken seien  $N_1$  und  $N_2$ . Die Gegenecken  $N_1, N_2$  heißen im folgenden die *Gegenpunkte* der Kegelschnitte  $k', k''$ .

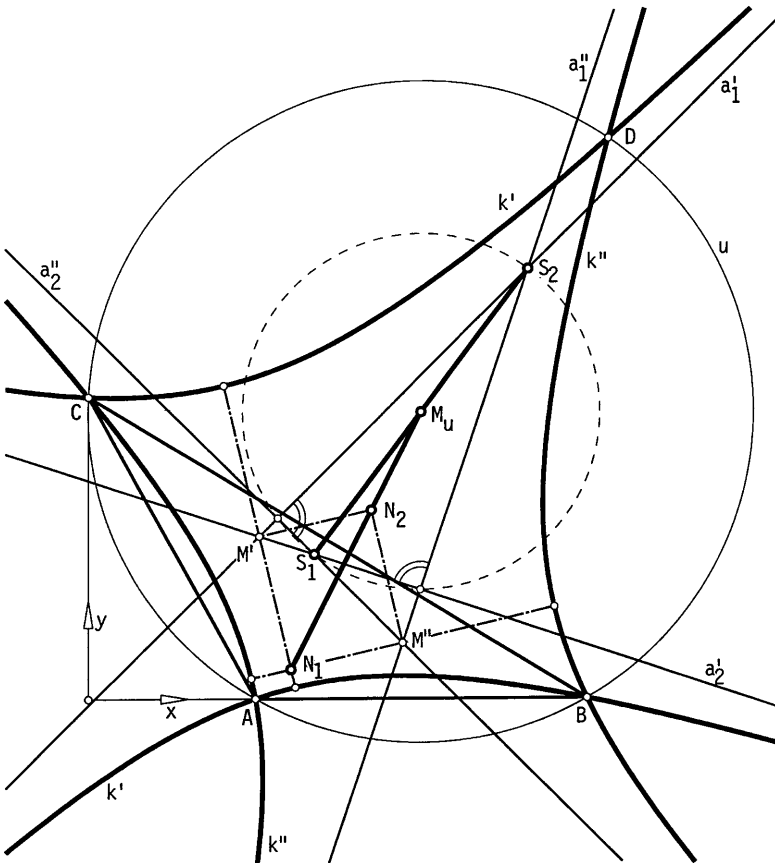


Abb. 3

Wir betrachten nun neben den Kegelschnitten  $\kappa', \kappa''$  den Umkreis  $u$  des Dreiecks  $ABC$ , der die Gleichung

$$x^2 + y^2 - (a+b)x - \frac{1}{c}(ab+c^2)y + ab = 0 \quad (13)$$

und in  $xy$ -Koordinaten den Mittelpunkt  $M_u\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right)$  besitzt. Gibt man den Mittelpunkten  $M', M'', M_u$  in dem nach (12) um den Winkel  $\phi$  gedrehten  $xy$ -Koordinatensystem die Koordinaten  $M'(x', y')$ ,  $M''(x'', y'')$ ,  $M_u(x_u, y_u)$ , so sind die Gegenpunkte der Kegelschnitte  $\kappa', \kappa''$  gegeben durch  $N_1(x', y'')$ ,  $N_2(x'', y')$ . Eine längere elementare Rechnung zeigt, daß  $N_1, N_2, M_u$  die Kollinearitätsbedingung

$$\begin{vmatrix} x' & y'' & 1 \\ x'' & y' & 1 \\ x_u & y_u & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

erfüllen (Abb. 3). Die *Gegenpunkte*  $N_1, N_2$  der Kegelschnitte  $\kappa', \kappa''$  und der *Umkreismittelpunkt*  $M_u$  eines Dreiecks  $ABC$  liegen folglich *kollinear*. Die Gerade  $[N_1N_2M_u]$  zählt somit zu den *merkwürdigen Geraden* eines Dreiecks  $ABC$  mit Mittelpunktskegelschnitten  $\kappa', \kappa''$ .

Sind  $\kappa', \kappa''$  *Hyperbeln*, so folgt aus (8) und (9), daß *jede Asymptote von  $\kappa'$  eine Asymptote von  $\kappa''$  orthogonal trifft* (Abb. 3). Seien  $a'_1, a'_2$  die Asymptoten von  $\kappa'$  und  $a''_1, a''_2$  die Asymptoten von  $\kappa''$ . Die zueinander orthogonalen Asymptoten seien  $a'_1, a''_2 (a'_1 \perp a''_2)$  und  $a''_1, a'_2 (a''_1 \perp a'_2)$ . Dann besitzen die Asymptotenschnittpunkte

$$S_1(x_{S_1}, y_{S_1}) := a'_1 \cap a''_1, \quad S_2(x_{S_2}, y_{S_2}) := a'_2 \cap a''_2 \quad (15)$$

die Koordinaten

$$x_{S_1} = \frac{\eta'' - \eta' + \Gamma_b \xi' - \Gamma_a \xi''}{\Gamma_b - \Gamma_a}, \quad y_{S_1} = \frac{\Gamma_b \eta'' - \Gamma_a \eta' + \Gamma_a \Gamma_b (\xi' - \xi'')}{\Gamma_b - \Gamma_a}, \quad (16)$$

$$x_{S_2} = \frac{\eta'' - \eta' + \Omega_b \xi' - \Omega_a \xi''}{\Omega_b - \Omega_a}, \quad y_{S_2} = \frac{\Omega_b \eta'' - \Omega_a \eta' + \Omega_a \Omega_b (\xi' - \xi'')}{\Omega_b - \Omega_a}; \quad (17)$$

dabei findet man  $(\xi', \eta')$  in (10),  $(\xi'', \eta'')$  in (11) und mit  $W := \sqrt{T^2 + 4abc^2}$  gilt:

$$\Gamma_a := \frac{T+W}{2ac}, \Gamma_b := \frac{T+W}{2bc}, \Omega_a := \frac{T-W}{2ac}, \Omega_b := \frac{T-W}{2bc}. \quad (18)$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß der *Umkreismittelpunkt*  $M_u$  der *Mittelpunkt* der Strecke  $S_1S_2$  ist. Damit liegen  $S_1, S_2, M_u$  kollinear und die orthogonalen Asymptoten  $a'_1, a''_2$  und  $a''_1, a'_2$  schneiden einander auf dem Kreis über der Strecke  $S_1S_2$  (Abb. 3). Die Gerade  $[S_1S_2M_u]$  zählt somit zu den *merkwürdigen Geraden* eines Dreiecks  $ABC$  mit Hyperbeln  $\kappa', \kappa''$ .

Das von  $\kappa'$  und  $\kappa''$  aufgespannte *Kegelschnittbüschel*  $\lambda\kappa' + \mu\kappa''$  besitzt die Dreiecksecken  $A, B, C$  als (allen Büschelkegelschnitten gemeinsame) *Grundpunkte*. Der ebenfalls allen Büschelkegelschnitten gemeinsame vierte Grundpunkt  $D$  ist ein *merkwürdiger Punkt* eines Dreiecks  $ABC$  und besitzt die Koordinaten

$$x_D = \frac{c^2(a+b)^2 + (ab-c^2)T}{c^2(a+b)^2 + T^2}(a+b), \quad y_D = \frac{T}{c(a+b)}x_D + c. \quad (19)$$

Das Kegelschnittbüschel  $\lambda\kappa' + \mu\kappa''$  enthält für  $\lambda = 1, \mu = -1$  den Umkreis  $u$  des Dreiecks  $ABC$ . Die Mittelpunkte der Mittelpunktskegelschnitte im Kegelschnittbüschel  $\lambda\kappa' + \mu\kappa''$  liegen (wie man leicht nachprüft) selbst auf einem Kegelschnitt.

Fällt der Punkt  $X(\xi, \eta)$  in einen der Grundpunkte  $A, B, C, D$ , dann sind die zugehörigen Lotfußpunkte  $P, Q, R$  sowie die Lotschnittpunkte  $P', Q', R'$  und  $P'', Q'', R''$  jeweils kollinear.

Weitere ausgezeichnete Punkte der Kegelschnitte  $\kappa'$  und  $\kappa''$  liegen auf den Höhen  $b_A, b_B, b_C$  des Dreiecks  $ABC$ . Einfaches Nachrechnen liefert als Punkte von  $\kappa'$

$$\begin{aligned} T'_{AB} &:= b_A \cap (\text{Lot in } B \text{ auf } AB), \\ T'_{BC} &:= b_B \cap (\text{Lot in } C \text{ auf } BC), \\ T'_{CA} &:= b_C \cap (\text{Lot in } A \text{ auf } CA) \end{aligned} \quad (20)$$

und als Punkte von  $\kappa''$

$$\begin{aligned} T''_{AB} &:= b_B \cap (\text{Lot in } A \text{ auf } AB), \\ T''_{BC} &:= b_C \cap (\text{Lot in } B \text{ auf } BC), \\ T''_{CA} &:= b_A \cap (\text{Lot in } C \text{ auf } CA). \end{aligned} \quad (21)$$

Die drei Geraden  $T'_{AB}T''_{CA} = b_A$ ,  $T'_{BC}T''_{AB} = b_B$ ,  $T'_{CA}T''_{BC} = b_C$  schneiden einander im Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $ABC$ .

Zusammenfassend ergibt sich

**Satz 1.** *Fällt man in der euklidischen Ebene von einem Punkt  $X$  die Lote auf die Seiten  $AB, BC, CA$  eines Dreiecks  $ABC$ , so gilt:*



- (a) Die Lotfußpunkte  $P \in AB, Q \in BC, R \in CA$  liegen genau dann kollinear – auf der Wallace-Geraden  $[PQR]$  von  $X$  zum Dreieck  $ABC$  – wenn  $X$  auf dem Umkreis des Dreiecks  $ABC$  liegt.
- (b) Die Lotschnittpunkte  $P', Q', R'$  (siehe (1)) liegen genau dann kollinear – auf der Wallace-Rechtsgeraden  $[P'Q'R']$  von  $X$  zum Dreieck  $ABC$  – wenn  $X$  auf dem Rechtskegelschnitt  $k'$  des Dreiecks  $ABC$  liegt.
- (c) Die Lotschnittpunkte  $P'', Q'', R''$  (siehe (1)) liegen genau dann kollinear – auf der Wallace-Linksgeraden  $[P''Q''R'']$  von  $X$  zum Dreieck  $ABC$  – wenn  $X$  auf dem Linkskegelschnitt  $k''$  des Dreiecks  $ABC$  liegt.
- (d)  $k'$  und  $k''$  sind Umkegelschnitte des Dreiecks  $ABC$ .
- (e)  $k'$  und  $k''$  sind Kegelschnitte desselben affinen Typs.
- (f) Sind  $k'$  und  $k''$  Mittelpunktskegelschnitte, so gehört zu jeder Achse von  $k'$  eine parallele Achse von  $k''$ . Die Gegenpunkte  $N_1, N_2$  der Kegelschnitte  $k', k''$  und der Umkreismittelpunkt  $M_u$  des Dreiecks  $ABC$  liegen kollinear (Abb. 3).
- (g) Sind  $k'$  und  $k''$  Hyperbeln ( $k'$  mit den Asymptoten  $a'_1, a'_2$  und  $k''$  mit den Asymptoten  $a''_1, a''_2$ ), so trifft jede Asymptote von  $k'$  eine Asymptote von  $k''$  orthogonal (etwa  $a'_1 \perp a''_2, a''_1 \perp a'_2$ ). Die Asymptotenschnittpunkte  $S_1 = a'_1 \cap a''_1, S_2 = a'_2 \cap a''_2$  und der Umkreismittelpunkt  $M_u$  des Dreiecks  $ABC$  liegen kollinear (Abb. 3).
- (h)  $k'$  und  $k''$  liegen mit dem Umkreis des Dreiecks  $ABC$  in demselben Kegelschnittbüschel. Die Dreiecksseiten  $A, B, C$  sind Grundpunkte dieses Büschels; der vierte Grundpunkt  $D$  ist ein merkwürdiger Punkt des Dreiecks  $ABC$  (Abb. 3).

## 2. Gleichseitige Dreiecke

Der Rechtskegelschnitt  $k'$  stimmt genau dann mit dem Umkreis des Dreiecks  $ABC$  überein, wenn  $ABC$  ein gleichseitiges Dreieck ist und damit  $b = -a, c = a\sqrt{3}$ . Entsprechendes gilt für den Linkskegelschnitt  $k''$  und für die Übereinstimmung von  $k'$  mit  $k''$ . In einem gleichseitigen Dreieck  $ABC$  existieren daher zu jedem Punkt  $X(\xi, \eta)$  seines Umkreises die Wallace-Gerade  $[PQR]$ , die Wallace-Rechtsgerade  $[P'Q'R']$  und die Wallace-Linksgerade  $[P''Q''R'']$  (Abb. 4). Für jedes gleichseitige Dreieck  $ABC$  sind die Dreiecke  $Q''XR', R''XP', P''XQ'$  nach Konstruktion gleichschenkelig; ihre Basiswinkel an den von  $X$  verschiedenen Ecken betragen  $\pi/6$ .

Wir betrachten nun in einem gleichseitigen Dreieck  $ABC$  das aus den Geraden  $[PQR], [P'Q'R'], [P''Q''R'']$  gebildete Dreieck mit den Ecken:

$$\begin{aligned} S &:= [P'Q'R'] \cap [P''Q''R''], \\ T &:= [PQR] \cap [P'Q'R'], \\ U &:= [P''Q''R''] \cap [PQR]. \end{aligned} \tag{22}$$

Gibt man den Ecken des Dreiecks  $ABC$  die Koordinaten  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(0, \sqrt{3})$ , so erhält sein Umkreis (mit dem Mittelpunkt  $M_u(0, \frac{1}{3}\sqrt{3})$ ) die Gleichung

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{4}{3}. \quad (23)$$

Bei Verwendung des Winkels  $\varphi$ , den der laufende Umkreisradius  $M_u X$  mit der positiven  $x$ -Achse einschließt, erhält der Umkreis (23) die Parameterdarstellung

$$\xi = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cos \varphi, \quad \eta = \frac{1}{3}\sqrt{3}(1 + 2 \sin \varphi), \quad (24)$$

die sich rationalisieren läßt mit

$$t := \tan \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin \varphi = \frac{2t}{1 + t^2}. \quad (25)$$

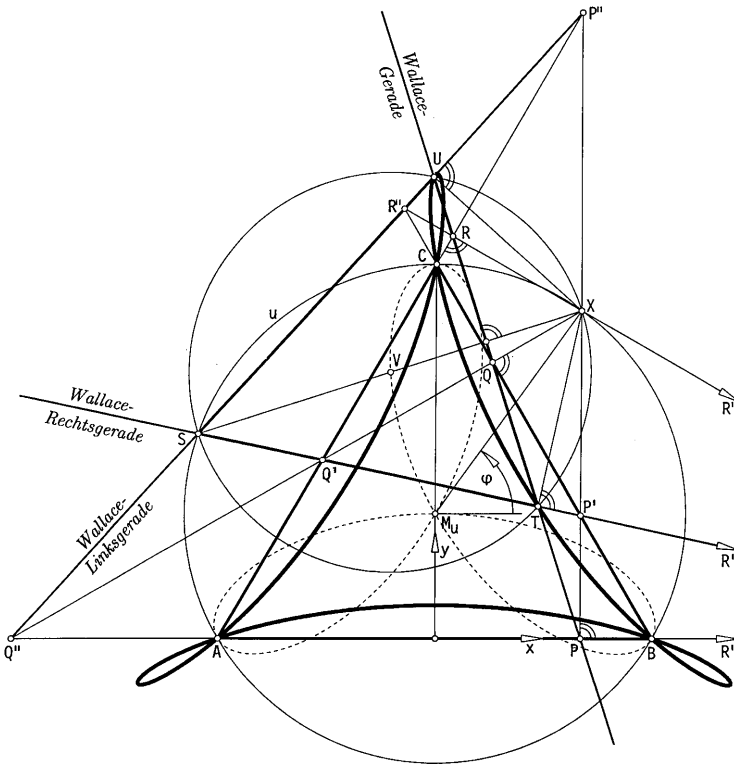


Abb. 4

Die drei Geraden  $[PQR]$ ,  $[P'Q'R']$  und  $[P''Q''R'']$  besitzen die Gleichungen (in denen (24) und (25) zu beachten sind):

$$y(3\xi + \sqrt{3}\eta - 3) = (x - \xi)(\sqrt{3}\xi - 3\eta - \sqrt{3})$$

(Wallace-Gerade $[PQR]$ ), (26)

$$\eta y = (\xi - 1)(x - \eta - \sqrt{3}\eta)$$

(Wallace-Rechtsgerade $[P'Q'R']$ ), (27)

$$\eta y = (\xi + 1)(x - \eta + \sqrt{3}\eta)$$

(Wallace-Linksgerade $[P''Q''R'']$ ). (28)

Man berechnet daraus die Koordinaten der Punkte  $S(x_S, y_S)$ ,  $T(x_T, y_T)$  und  $U(x_U, y_U)$ :

$$x_S = \xi(1 - \sqrt{3}\eta), \quad y_S = \sqrt{3}(1 - \xi^2), \quad (29)$$

$$x_T = \frac{\sqrt{3}(1 - \xi)\eta}{\omega\eta - \xi + 1} + \xi, \quad y_T = \frac{\sqrt{3}(1 - \xi)\eta}{\omega\eta - \xi + 1} \omega, \quad (30)$$

$$x_U = \frac{\sqrt{3}(1 + \xi)\eta}{\omega\eta - \xi - 1} + \xi, \quad y_U = \frac{\sqrt{3}(1 + \xi)\eta}{\omega\eta - \xi - 1} \omega, \quad (31)$$

mit

$$\omega := \frac{\sqrt{3}\xi - 3\eta - \sqrt{3}}{3\xi + \sqrt{3}\eta - 3} = \frac{t + 1}{t - 1} \quad (\text{Steigung der Geraden } TU). \quad (32)$$

Wie einfache Rechnungen zeigen, liegt der Schnittpunkt  $S$  der Wallace-Rechtsgeraden  $[P'Q'R']$  mit der Wallace-Linksgeraden  $[P''Q''R'']$  stets auf dem Umkreis des Dreiecks  $ABC$  und es gilt stets (Abb. 4):

$$SX \perp TU, \quad UX \perp US, \quad TX \perp TS. \quad (33)$$

Längere, jedoch elementare Rechnungen lassen erkennen, daß  $STU$  für jeden Umkreispunkt  $X$  ein *gleichseitiges Dreieck* ist. Für die Seitenlänge (etwa  $TU$ ) folgt mit (30), (31), (32) sowie (24) und (25):

$$(TU)^2 = 12\eta^2(\omega^2 + 1) \frac{[\xi(\omega\eta - \xi) + 1]^2}{[(\omega\eta - \xi)^2 - 1]^2} = 2 \frac{(t^2 + 4t + 1)^2(t - 1)^2}{(t^2 + 1)^3}. \quad (34)$$

Aus (34) folgt, daß das Dreieck  $STU$  genau für verschwindende Seitenlänge  $TU$ , also für  $X = A$ ,  $X = B$  und  $X = C$  in einen Punkt entartet und zwar in  $A, B$  bzw.  $C$ .

Durchläuft  $X$  den Umkreis des Dreiecks  $ABC$ , so durchläuft die Ecke  $U$  des Dreiecks  $STU$  eine geschlossene, dreiachsig symmetrische, rationale Kurve 4. Ordnung mit drei Doppelpunkten (Knöten), mit der aus (31) unter Verwendung von (32), (24) und (25) folgenden Parameterdarstellung:

$$x_U = \frac{(\sqrt{3}-3)(t-1)(t-\sqrt{3}+2)(t^2-4\sqrt{3}-7) - 4\sqrt{3}(t^4-1)}{6(t^2+1)^2} \quad (35)$$

$$y_U = \frac{(\sqrt{3}-3)(t+1)(t-\sqrt{3}+2)(t^2-4\sqrt{3}-7)}{6(t^2+1)^2}. \quad (36)$$

Zugleich durchläuft die Ecke  $T$  des Dreiecks  $STU$  dieselbe geschlossene rationale Kurve 4. Ordnung, nunmehr mit der aus (30) unter Verwendung von (32), (24) und (25) folgenden Darstellung:

$$x_T = \frac{(\sqrt{3}+3)(t-1)(t+\sqrt{3}-2)(t^2+4t+1) - 4\sqrt{3}(t^4-1)}{6(t^2+1)^2} \quad (37)$$

$$y_T = \frac{(\sqrt{3}+3)(t+1)(t+\sqrt{3}-2)(t^2+4t+1)}{6(t^2+1)^2}. \quad (38)$$

Man erkennt unmittelbar, daß der laufende Punkt  $X$  auf dem Umkreis des zugehörigen Dreiecks  $STU$  liegt;  $SX$  ist ein Durchmesser dieses Umkreises. Sein Mittelpunkt  $V$  läuft ebenfalls auf einer geschlossenen rationalen Kurve 4. Ordnung. Für diese Bahnkurve, die den Umkreismittelpunkt  $M_U$  des Dreiecks  $ABC$  als dreifachen Punkt besitzt, ermittelt man die Darstellung:

$$x_V = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \frac{(t^2-1)(t^2-4t+1)}{(t^2+1)^2}, \quad y_V = \frac{2}{3}\sqrt{3}t \frac{t^2+4t+1}{(t^2+1)^2}. \quad (39)$$

Zusammenfassend gilt:

**Satz 2.** *In einem gleichseitigen Dreieck  $ABC$  existieren zu jedem Punkt  $X$  seines Umkreises  $u$  die Wallace-Gerade, die Wallace-Rechtsgerade und die Wallace-Linksgerade. Für jeden Punkt  $X \in u$  bilden diese Geraden die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks  $STU$  (das für  $X = A$ ,  $X = B$  und  $X = C$  in die Dreiecksseiten  $A, B, C$  entartet). Durchläuft  $X$  den Umkreis  $u$ , so durchläuft auch  $S$  (der Schnittpunkt der Wallace-Rechtsgeraden mit der Wallace-Linksgeraden) den Umkreis  $u$ . Die Ecken  $T$  und  $U$  durchlaufen*

*dieselbe geschlossene, dreiachsig symmetrische rationale Kurve 4. Ordnung mit drei Knoten (Abb. 4).*

### Dank

Der Verfasser dankt Herrn Dr. Hermann Vogel für seine Mithilfe bei der Herstellung der Abbildungen.

### Literatur

- [1] Berkhan, G., Meyer, W. Fr.: Neuere Dreiecksgeometrie. In: Enzykl. d. math. Wiss., Bd. III, 1. Teil, 2. Hälfte, 10.III.34. Leipzig: B. G. Teubner (1914 – 1931).
- [2] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.: Zeitlose Geometrie. Stuttgart; E. Klett 1983.
- [3] Giering, O.: Affine and projective generalization of Wallace lines. J. Geom. Graph. **1**, 119 – 133 (1997).
- [4] Naas, J., Schmid, H. L.: Mathematisches Wörterbuch, Bd. II. Berlin; Akademie-Verlag, Stuttgart; B. G. Teubner 1972.
- [5] Simon, M.: Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Leipzig; B. G. Teubner 1906.

**Anschrift des Verfassers:** Prof. Dr. O. Giering, TU München, Zentrum Mathematik, Arcisstraße 21, D-80333 München.