Sitzungsber. Abt. II (1996) 205: 35–55

Ein Äquivalent zum 1. Unvollständigkeitssatz

Von

C. C. Christian

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 7. März 1996
durch das w. M. Curt Christian)

Wir beweisen den Satz

$$\mathrm{Erw}(T, Z_p) \wedge \mathrm{Max\,Cst}\,\mathrm{T} \rightarrow \neg\,\mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T)$$

(In jeder maximal konsistenten Erweiterung T des Peanoformalismus Z_p (bzw. R. Robinsonformalismus Z_{RR}) ist die Menge der Gödelzahlen von Theoremen von T nicht rekursiv aufzählbar.)

Der zu beweisende Satz kann in dem Sinn als Äquivalent zum 1. Unvollständigkeitssatz betrachtet werden, als zu seinem Beweis der 1. Unvollständigkeitssatz verwendet wird, andererseits letzterer sich aus dem ersten ergibt.

Als Prämissen für den zu beweisenden Satz benötigen wir für die durch

$$\mathrm{RE}(\mathrm{M}) :\leftrightarrow \mathrm{M} = \emptyset \;\vee \bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Func}(f) \wedge \mathrm{wb}\, f = \mathrm{M}.$$

definierte rekursive Aufzählbarkeit (RE) zwei Äquivalenzsätze:

$$\mathrm{M} \neq \emptyset \dot{\rightarrow} \mathrm{RE}(\mathrm{M}) \leftrightarrow \bigvee_R \cdot \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M}.$$

$$\mathrm{RE}(\mathrm{M}) \leftrightarrow \bigvee_R \cdot \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(\mathrm{R}) = \mathrm{M}.$$

Wir beweisen zunächst den ersten dieser beiden Sätze:

$$\underline{\mathrm{M} \neq \emptyset \dot{\rightarrow} \mathrm{RE}(\mathrm{M}) \leftrightarrow \bigvee_R \cdot \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M}.}$$

Der Graph G_f einer Funktion f ist definiert durch:

$$G_f(x, y) :\leftrightarrow f(x) = y \quad \text{oder} \quad G_f := \{\langle x, y\rangle \mid f(x) = y\}$$

$$\mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) :\leftrightarrow \mathrm{Func}(R) \wedge \bigwedge_x \bigvee_y R(x, y)$$

a) $\mathrm{Rek\,Func}(f) \dot{\rightarrow}$

1.)

$\dot{\rightarrow}$ $\underline{\mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(G_f)}$: $G_f(x, y_1) \wedge G_f(x, y_2) \rightarrow y_1 = f(x) = y_2, \bigwedge_x \bigvee_y G_f(x, y)$

2.)

$\dot{\rightarrow}$ $\underline{\mathrm{Rek\,Rel}(G_f)}$ $\chi_{(G_f)}$ bedeute die charakteristische Funktion von G_f

$$\chi_{(G_f)}(x, y) = 1 \leftrightarrow G_f(x, y), \leftrightarrow f(x) = y, \leftrightarrow \chi_=(f(x), y) = 1$$

$$\chi_{(G_f)}(x, y) = \chi_=(f(\pi_1^2(x, y)), \pi_2^2(x, y))$$

$$\chi_{(G_f)}(x, y) = \chi_=(g(x, y), \pi_2^2(x, y)) \quad \text{mit} \quad g(x, y) := f(\pi_1^2(x, y))$$

$\mathrm{Rek\,Func}(f) \rightarrow]\ \mathrm{Rek\,Func}(g), (\chi_=), (\pi_2^2),$

nach dem Substitutionsschema:

$\mathrm{Rek\,Func}(\chi_{(G_f)})$, ergo: $\mathrm{Rek\,Rel}(G_f)$

$\mathrm{Rek\,Func}(f) \dot{\rightarrow}$

3.)

$\dot{\rightarrow}$ $\underline{\mathrm{wb}(G_f) = \mathrm{wb}(f)}$

$$y \in \mathrm{wb}(G_f) \leftrightarrow \bigvee_x G_f(x, y), \leftrightarrow \bigvee_x f(x) = y, \leftrightarrow y \in \{y \mid \bigvee_x f(x) = y\} =$$

$$= \mathrm{wb}(f)$$

$$\mathrm{wb}(G_f) = \mathrm{wb}(f)$$

$$\mathrm{Rek\,Func}(f) \wedge \mathrm{wb}(f) = \mathrm{M} \xrightarrow{1.)-3.)} \bigvee_R \cdot \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \wedge\, \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M}.$$

$$\bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Func}(f) \wedge \mathrm{wb}(f) = \mathrm{M}. \rightarrow \bigvee_R \cdot \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \wedge\, \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M}.$$

b) $\mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M} \dot{\rightarrow}$

$$\dot{\rightarrow} f(x) := (\mu z)(R(x, z)) \wedge \bigwedge_x \bigvee_z R(x, z)$$

$$= (\mu z)(\chi_R(x, z) = 1) \wedge \bigwedge_x \bigvee_z \chi_R(x, z) = 1$$

$\alpha)$
$\dot{\rightarrow}$ $\mathrm{Hy}_2 \rightarrow]$ $\mathrm{Rek\,Func}(\chi_R)$ ergo: $\mathrm{Rek\,Func}\,(f)$

$\beta)$
$\dot{\rightarrow}$ $\mathrm{Def}\,f, \mathrm{Def}\,\mu - 0\mathrm{p} \rightarrow]$ $R(x, f(x))$

$$\dot{\rightarrow}\ f(x) = y \rightarrow R(x,y)\ \dot{\wedge}\ R(x,y) \rightarrow R(x,y) \wedge \bigwedge_z \cdot R(x,z) \xrightarrow{Hy_1} y = z, y \leq z.$$
$$\rightarrow y = (\mu z)\, R(x,z)$$
$$\rightarrow f(x) = y$$

$$\dot{\rightarrow} f(x) = y \leftrightarrow R(x,y)$$

$$\dot{\rightarrow} y \in \mathrm{wb}\,(R) \leftrightarrow \bigvee_x R(x,y), \leftrightarrow \bigvee_x f(x) = y, \leftrightarrow y \in \{y | \bigvee_x f(x) = y\} =$$
$$= \mathrm{wb}\,(f)$$

$$\rightarrow \mathrm{wb}\,(f) = \mathrm{wb}\,(R) \overset{Hy_3}{=} \mathrm{M}$$

$$\overset{(\alpha,\beta)}{\rightarrow} \bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Func}\,(f) \wedge \mathrm{wb}\,(f) = \mathrm{M}.$$

$$\bigvee_R \cdot \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}\,(R) = \mathrm{M}. \rightarrow \bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Func}\,(f) \wedge$$
$$\wedge\ \mathrm{wb}\,(f) = \mathrm{M}.$$

a,b) $\bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Func}\,(f) \wedge \mathrm{wb}\,(f) = \mathrm{M}. \dot{\leftrightarrow}$

$$\dot{\leftrightarrow} \bigvee_R \cdot \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}\,(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}\,(R) = \mathrm{M}.$$

ergo $\mathrm{M} = \emptyset \ \vee \bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Func}\,(f) \wedge \mathrm{wb}\,(f) = \mathrm{M}. \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \mathrm{M} = \emptyset \ \vee \bigvee_R \cdot \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}\,(R) = \mathrm{M}.$$

Def RE] $\mathrm{RE}\,(\mathrm{M}) \dot{\leftrightarrow} \mathrm{M} = \emptyset \ \vee$

$$\vee \bigvee_R \cdot \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}\,(R) = \mathrm{M}. \quad [\equiv \otimes]$$

Da: $\mathrm{Func}\,(\emptyset)$, $[x \notin \emptyset \ \leftrightarrow]\ \chi_\emptyset\ (x) = 0 = C_0^1(x)$, $\mathrm{Rek\,Func}(\chi_\emptyset)$, ergo
$\mathrm{Rek\,Rel}(\emptyset) \ \wedge \mathrm{wb}(\emptyset) \ = \emptyset$ ergibt sich, da $\neg \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(\emptyset)$

$$\mathrm{M} = \emptyset \ \rightarrow \mathrm{Func}\,(\emptyset) \ \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(\emptyset) \ \wedge \mathrm{wb}\,(\emptyset) \ = \mathrm{M}$$
$$\mathrm{M} = \emptyset \ \rightarrow \bigvee_R \cdot \mathrm{Func}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}\,(R) = \mathrm{M}.$$

also nicht:

$$\mathrm{M}=\emptyset \quad \vee \bigvee_{R} \cdot \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M}. \dot{\leftrightarrow}$$

$$\dot{\leftrightarrow} \bigvee_{R} \cdot \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M}.$$

was durch Umsetzung mit Formel ⊛ ergäbe:

$$\mathrm{RE}(\mathrm{M}) \leftrightarrow \bigvee_{R} \cdot \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M},$$

sondern aus ⊗ nur:

$$\mathrm{M} \neq \emptyset \dot{\leftrightarrow} \mathrm{RE}(\mathrm{M}) \leftrightarrow \bigvee_{R} \cdot \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M}.$$

Wir zeigen nun den bekannten Satz:

$$\underline{\mathrm{RE}(\mathrm{M}) \leftrightarrow \bigvee_{R} \cdot \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M}.}$$

1.) $\mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M} \rightarrow$

α)

$$\rightarrow \emptyset = \emptyset \quad \vee \bigvee_{f} \cdot \mathrm{Rek\,Func}\, f \wedge \mathrm{wb}(f) = \emptyset.$$

$$\rightarrow \mathrm{M} = \emptyset \rightarrow \mathrm{M} = \emptyset \quad \vee \bigvee_{f} \cdot \mathrm{Rek\,Func}\, f \wedge \mathrm{wb}(f) = \mathrm{M}.$$

$$\rightarrow \mathrm{RE}(\mathrm{M})$$

β)

$$\rightarrow \mathrm{M} \neq \emptyset \rightarrow \bigvee_{m} m \in \mathrm{M}$$

$\rightarrow$ Def durch Fallunterscheidung

$$R((x)_0,(x)_1) \rightarrow f(x) = (x)_1$$

$$\neg R((x)_0,(x)_1) \rightarrow f(x) = m$$

1.)

$\rightarrow \mathrm{Rek\,Func}(f)$

2a)

$$\dot{\rightarrow} y \in \mathrm{wb}(f) \rightarrow \bigvee_{x} . f(x) = y \ \dot{\wedge}$$

$$\dot{\wedge}\ R((x)_0,(x)_1) \rightarrow (x)_1 = f(x) = y$$

$$\rightarrow R((x)_0, y)$$

$$\rightarrow y \in \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M}$$

$$\dot{\wedge}\ \neg R((x)_0,(x)_1) \rightarrow y = f(x) = m \in \mathrm{M}$$

$$\dot{\wedge}\ [R((x)_0,(x)_1) \vee \neg R((x)_0,(x)_1) \rightarrow]\, y \in \mathrm{M}$$

$$\rightarrow \mathrm{wb}(f) \subseteq \mathrm{M}$$

2b)

$$\to y \in \mathrm{M} \xrightarrow{Hy_2} y \in \mathrm{wb}(R), \bigvee_x R(x,y), \bigvee_x R(([x,y])_0, ([x,y])_1) \wedge$$

$$\wedge\, y = ([x,y])_1$$

$$\to \bigvee_z y = (z)_1 \wedge R((z)_0,(z)_1), \mathrm{Def}\, f]\, f(z) = (z)_1 = y$$

$$\to y \in \mathrm{wb}(f)$$

$$\to \mathrm{M} \subseteq \mathrm{wb}(f)$$

$$\to 2\mathrm{a}, 2\mathrm{b}\ \mathrm{Part}] \bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Func}(f) \wedge \mathrm{wb}(f) = \mathrm{M}.$$

Verdü

$$\to \mathrm{M} = \emptyset \vee \bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Func}(f) \wedge \mathrm{wb}(f) = \mathrm{M}.$$

$$\to \mathrm{RE}(\mathrm{M})$$

α, β)

$$\to [\mathrm{M} = \emptyset \ \vee \mathrm{M} \neq \emptyset \ \to]\ \mathrm{RE}(\mathrm{M})$$

$$\bigvee_R \cdot \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M}. \to \mathrm{Rek}(\mathrm{M}).$$

2.) $\mathrm{RE}(\mathrm{M}) \leftrightarrow \mathrm{M} = \emptyset \ \vee \bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Func}\, f \wedge \mathrm{wb}\, f = \mathrm{M}$

$$\to \mathrm{M} = \emptyset \ \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(\emptyset) \ \wedge \mathrm{wb}(\emptyset) \ = \emptyset \ \dot{\vee}$$

$$\dot{\vee} \bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Rel}(G_f) \wedge \mathrm{wb}(G_f) = \mathrm{wb}(f) = \mathrm{M}.$$

$$\to \bigvee_R \cdot \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M}.$$

also 1.), 2.) $\mathrm{RE}(\mathrm{M}) \leftrightarrow \bigvee_R \cdot \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M}.$

Weil im folgenden nicht benötigt, sei bloß angemerkt:
Wegen $\mathrm{Rek\,Rel}(R) \leftrightarrow \mathrm{Rek\,Rel}(\check{R}), R = \check{\check{R}}$, $\mathrm{wb}(R) = \mathrm{db}(\check{R})$, $\mathrm{db}(R) = \mathrm{wb}$ $(\check{R})$ ergibt sich: $\bigvee_R \cdot \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{M}. \leftrightarrow \bigvee_R \cdot \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{db}(R) =$ $= \mathrm{M}.$ also auch $\mathrm{RE}(\mathrm{M}) \leftrightarrow \bigvee_R \cdot \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{db}(R) = \mathrm{M}.$
Die anderen bekannten Äquivalente für RE werden hier nicht benötigt.
Wir wenden uns nun dem zu beweisenden Satz zu.

$\mathrm{Erw}(T, Z_p) \wedge \mathrm{MaxCst}(T) \ddot{\to}$
$\ddot{\to} \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{Thm}_T \dot{\to}$

1.)

$\rightarrow$ zunächst 3 Hilfssätze:

1a) $\underline{r(x) := (\mu z)\, R(x,z), \text{ dann Rek Func}(r) \wedge \bigwedge_{x,y\in\mathbb{N}} R(x,y) \leftrightarrow r(x) = y.}$

$$\alpha) \bigwedge_x \bigvee_y R(x,y), r(x) = (\mu z)\,(\chi_R(x,z) = 1) \wedge \bigwedge_x \bigvee_y \chi_R(x,y) = 1, \mathrm{Hy}_4]\, \text{Rek Func}(\chi_R)$$

ergo Rek Func (r)

$$\beta)\ R(x, r(x)), r(x) = y \rightarrow R(x,y) \dot{\wedge} R(x,y) \rightarrow R(x,y) \wedge \bigwedge_z \cdot R(x,z) \rightarrow$$

$$\overset{Hy_3}{\longrightarrow} y = z, y \leq z.$$

$$\rightarrow y = (\mu z)\, R(x,z) = r(x)$$

$$R(x,y) \leftrightarrow r(x) = y$$

1b) $\underline{(\check{\mathrm{Cls}} \circ \check{\mathrm{Neg}} \circ R)\,(x,y) \leftrightarrow r(x) = \mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y))}$

$$(\check{\mathrm{Cls}} \circ \check{\mathrm{Neg}} \circ R)\,(x,y) \leftrightarrow \bigvee_{v,w} \cdot R(x,v) \wedge \check{\mathrm{Neg}}(v,w) \wedge \check{\mathrm{Cls}}(w,y).$$

$$\leftrightarrow \bigvee_{v,w} \cdot R(x,v) \wedge \mathrm{Neg}(w,v) \wedge \mathrm{Cls}(y,w).$$

$$\overset{1a)}{\leftrightarrow} \bigvee_{v,w} \cdot r(x) = v \wedge \mathrm{neg}(w) = v \wedge \mathrm{cls}(y) = w.$$

$$(\check{\mathrm{Cls}} \circ \check{\mathrm{Neg}} \circ R)\,(x,y) \leftrightarrow r(x) = \mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y))$$

1c) $\underline{\mathrm{T}^* = \mathrm{L}[\{\mathscr{A} \mid \vdash_T \mathscr{A}\}], \text{ dann} \quad \mathrm{Thm}_T = \mathrm{Thm}_{T^*} = EAx_{T^*}}$

$$\alpha)\ \left(\vdash_T \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{A} \in EAx_{T^*}, \vdash_{T^*} \mathscr{A}\right)$$

$$\wedge \left(\vdash_{T^*} \mathscr{A} \rightarrow \bigvee_{\mathscr{A}_1,\ldots,\mathscr{A}_n \in EAx_{T^*}} \mathscr{A}_{1,\ldots,}\mathscr{A}_n \vdash_L \mathscr{A}\right)$$

$$\rightarrow \bigvee_{\mathscr{A}_1,\ldots,\mathscr{A}_n} \vdash_T \mathscr{A}_{1,\ldots,}\mathscr{A}_n \wedge \mathscr{A}_{1,\ldots,}\mathscr{A}_n \vdash_L \mathscr{A}$$

$$\left(\vdash_T \mathscr{A} \rightarrow \vdash_{T^*} \mathscr{A}\right) \wedge \left(\vdash_{T^*} \mathscr{A} \rightarrow \vdash_T \mathscr{A}\right), T \overset{\mathrm{Ded}}{\sim} T^*, \mathrm{Thm}_T = \mathrm{Thm}_{T^*}$$

$$\beta)\ \left(\vdash_{T^*} \mathscr{A} \overset{\alpha)}{\rightarrow} \vdash_T \mathscr{A}, \mathscr{A} \in EAx_{T^*}\right) \wedge \left(\mathscr{A} \in EAx_{T^*} \rightarrow \vdash_{T^*} \mathscr{A}, {}^{\alpha)} \vdash_T \mathscr{A}\right)$$

$$\mathscr{T\!hm}_{T^*} = \mathscr{E}\mathscr{A}\mathscr{x}_{T^*}, \quad \text{Inexpansiv}(T^*), \mathrm{Thm}_{T^*} = EAx_{T^*}$$

$$\mathrm{Erw}(T, Z_p) \wedge \mathrm{Max\,Cst}(T) \ \dddot{\rightarrow}$$

$$\dddot{\rightarrow} \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{Thm}_T \ \dot{\rightarrow}$$

2.)

$$\rightarrow \underline{\neg\,\mathrm{Func}(\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)}$$

$$\nvdash_T x \neq x, \nvdash_T \bigwedge_x x \neq x$$

$$\mathrm{cls}(\ulcorner x \neq x \urcorner) = \ulcorner \bigwedge_x x \neq x \urcorner = \mathrm{cls}\left(\ulcorner \bigwedge_x x \neq x \urcorner\right),$$

$$\ulcorner x \neq x \urcorner \neq \ulcorner \bigwedge_x x \neq x \urcorner$$

sei $y_1 = \ulcorner x \neq x \urcorner, \quad y_2 = \ulcorner \bigwedge_x x \neq x \urcorner, \quad$ dann:

$$\mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y_1)) = \mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y_2)), y_1 \neq y_2$$

$$\rightarrow \vdash_T \neg \bigwedge_{\dots} x \neq x, \neg \bigwedge_{\dots} \bigwedge_x x \neq x$$

$$\rightarrow \mathrm{neg}(\mathrm{cl}(y_1)), \mathrm{neg}(\mathrm{cl}(y_2)) \in \mathrm{Thm}_T = \mathrm{wb}(R) \wedge y_1 \neq y_2$$

$$\rightarrow \bigvee_{x_1,x_2} r(x_1) = \mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y_1)) \wedge r(x_2) = \mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y_2)) \wedge \mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y_1)) =$$

$$= \mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y_2)).$$

$$\wedge\, r(x_1) = r(x_2) \wedge y_1 \neq y_2$$

$$\rightarrow \bigvee_{x_1} \cdot r(x_1) = \mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y_1)) \wedge r(x_1) = \mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y_2)) \wedge y_1 \neq y_2.$$

$$\rightarrow 1\mathrm{b}) \rightarrow] \bigvee_{x_1,y_1,y_2} \cdot (\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)(x,y_1) \wedge (\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)(x,y_2) \wedge y_1 \neq y_2.$$

$$\rightarrow \neg \bigwedge_{x,y_1,y_2} (\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)(x,y_1),(x,y_2) \rightarrow y_1 = y_2.$$

$$\rightarrow \neg\,\mathrm{Func}(\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)$$

Wegen Verfügbarkeit der zweiten Äquivalenz für RE ist es für den weiteren Beweis nicht erforderlich, daß $\mathrm{Func}(\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)$. Hier sei auch angemerkt: Die Verwendung von $\mathrm{Neg}\circ\mathrm{Cls}\circ R$ anstelle von $\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R$ wäre nicht zielführend.

3.)

$$\rightarrow \underline{\mathrm{Rek\,Rel}(\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)}$$

$$1\mathrm{b}) \rightarrow] \quad \chi_{(\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)}(x,y) = 1 \leftrightarrow \chi_{=}(r(x), \mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y))) = 1$$

$$\chi_{(\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)}(x,y) = \chi_{=}(r(\pi_1^2(x,y)), \mathrm{neg}(\mathrm{cls}(\pi_2^2(x,y))))$$

1a) $\mathrm{Rek\,Func}(r)$, (neg), (cls), (π_j^n) ergo $\mathrm{Rek\,Func}(\chi_{(\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)})$

$$\mathrm{Rek\,Rel}(\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)$$

4.)

$\rightarrow\ \underline{\mathrm{wb}(\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)=\mathrm{Frm}_T\backslash\mathrm{Thm}_T}$

4α)

$\rightarrow\ \underline{\mathrm{wb}(\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)\subseteq\mathrm{Frm}_T\backslash\mathrm{Thm}_T}$

$$\mathrm{Erw}(T,Z_\mathrm{P})\wedge\mathrm{Max\,Cst}(T)\ \ddot{\rightarrow}$$

$$\ddot{\rightarrow}\ \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R)\wedge\mathrm{Rek\,Rel}(R)\wedge\mathrm{wb}(R)=\mathrm{Thm}_T\ \dot{\rightarrow}$$

$$\dot{\rightarrow}\, y\in\mathrm{wb}(\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)\rightarrow\bigvee_x(\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)(x,y)$$

$$\rightarrow\bigvee_x\cdot\overset{1b)}{r(x)=\mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y))}\wedge\overset{1a)}{R(x,\mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y)))}.$$

$$\rightarrow\mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y))\in\mathrm{wb}\,R=\mathrm{Thm}_T$$

$$\wedge\ \mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y))\in\mathrm{Frm}_T$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Cst}\,T}\mathrm{cls}(y)\notin\mathrm{Thm}_T\wedge\mathrm{cls}(y)\in\mathrm{Frm}_T$$

$$\rightarrow y\notin\mathrm{Thm}_T\wedge y\in\mathrm{Frm}_T$$

$$\rightarrow y\in\mathrm{Frm}_T\backslash\mathrm{Thm}_T$$

$$\rightarrow\ \mathrm{wb}(\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)\subseteq\mathrm{Frm}_T\backslash\mathrm{Thm}_T$$

4β)

$\rightarrow\ \underline{\mathrm{Frm}_T\backslash\mathrm{Thm}_T\subseteq\mathrm{wb}(\check{\mathrm{Cls}}\circ\check{\mathrm{Neg}}\circ R)}$

$$y\in\mathrm{Frm}_T\backslash\mathrm{Thm}_T\rightarrow y\in\mathrm{Frm}_T\wedge\neg(y\in\mathrm{Thm}_T)$$

$$\rightarrow\bigvee_{\mathscr{A}\in\mathit{frm}_T}y=\ulcorner\mathscr{A}\urcorner\wedge\neg\bigvee_{\mathscr{B}}y=\ulcorner\mathscr{B}\urcorner\wedge\mathscr{B}\in\mathscr{T}\!\mathit{hm}_T,$$

$$\bigwedge_{\mathscr{B}}\cdot y=\ulcorner\mathscr{B}\urcorner\rightarrow\underset{T}{\nvdash}\mathscr{B}.$$

$$\rightarrow\bigvee_{\mathscr{A}\in\mathit{frm}_T}y=\ulcorner\mathscr{A}\urcorner\ \dot{\wedge}\ [y=\ulcorner\mathscr{A}\urcorner\rightarrow]\underset{T}{\nvdash}\mathscr{A}\ \dot{\wedge}\ \mathrm{Vst}(T)$$

$$\rightarrow\bigvee_{\mathscr{A}\in\mathit{frm}_T}y=\ulcorner\mathscr{A}\urcorner\wedge\underset{T}{\vdash}\neg\bigwedge_{\dots}\mathscr{A}$$

$$\rightarrow\bigvee_{\mathscr{A}\in\mathit{frm}_T}\mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y))=\ulcorner\neg\bigwedge_{\dots}\mathscr{A}\urcorner\wedge\ulcorner\neg\bigwedge_{\dots}\mathscr{A}\urcorner\in\mathrm{Thm}_T$$

$$\rightarrow\ \mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y))\in\ \mathrm{Thm}_T=\mathrm{wb\ R}$$

$$\rightarrow\ \bigvee_x R(x,\mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y))),^{1a)}\bigvee_x r(x)=\mathrm{neg}(\mathrm{cls}(y))$$

nach Satz 1b)

$$\rightarrow \ \bigvee_{x} (\mathrm{C\check{l}s} \circ \mathrm{N\check{e}g} \circ R)(x, y)$$

$$\rightarrow \ y \in \mathrm{wb}(\mathrm{C\check{l}s} \circ \mathrm{N\check{e}g} \circ R)$$

$$\rightarrow \ \mathrm{Frm}_T \backslash \mathrm{Thm}_T \subseteq \mathrm{wb}(\mathrm{C\check{l}s} \circ \mathrm{N\check{e}g} \circ R)$$

$$\rightarrow \ 4\alpha, \beta \rightarrow] \ \mathrm{wb}(\mathrm{C\check{l}s} \circ \mathrm{N\check{e}g} \circ R) = \mathrm{Frm}_T \backslash \mathrm{Thm}_T$$

5.)

$$\rightarrow \ 3, 4, \text{ Partic}] \bigvee_{R} \cdot \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{Frm}_T \backslash \mathrm{Thm}_T.$$

$$\mathrm{Erw}(T, Z_p) \wedge \mathrm{Max\,Cst}(T) \rightarrow$$

$$\rightarrow \bigvee_{R} \cdot \mathrm{Func}_{\mathbb{N}}(R) \wedge \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{Thm}_T \cdot \rightarrow$$

$$\rightarrow \bigvee_{R} \cdot \mathrm{Rek\,Rel}(R) \wedge \mathrm{wb}(R) = \mathrm{Frm}_T \backslash \mathrm{Thm}_T.$$

$$\text{Präm.} \wedge \mathrm{Thm}_T \neq \emptyset \rightarrow]$$

$$\rightarrow \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T) \rightarrow \mathrm{RE}(\mathrm{Frm}_T \backslash \mathrm{Thm}_T)$$

$$\rightarrow \mathrm{Rek}(\mathrm{Frm}_T), \mathrm{RE}(\overset{\mathrm{IN}}{-} \mathrm{Frm}_T) \wedge \mathrm{Hy}] \ \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T)$$

$$\rightarrow \mathrm{RE}(\overset{\mathrm{IN}}{-} \mathrm{Frm}_T \cup \mathrm{Thm}_T) \wedge \overset{\mathrm{IN}}{-} \mathrm{Frm}_T \cup \mathrm{Thm}_T =$$

$$= \mathrm{IN} \cap - \mathrm{Frm}_T \dot{\cup} \, \mathrm{IN} \cap \mathrm{Thm}_T$$

$$= \mathrm{IN} \cap (- \mathrm{Frm}_T \cup \mathrm{Thm}_T)$$

$$= \mathrm{IN} \cap - (\mathrm{Frm}_T \cap - \mathrm{Thm}_T)$$

$$= \overset{\mathrm{IN}}{-} (\mathrm{Frm}_T \backslash \mathrm{Thm}_T)$$

$$\rightarrow \mathrm{RE}(\overset{\mathrm{IN}}{-} (\mathrm{Frm}_T \backslash \mathrm{Thm}_T) \wedge \text{oben:}] \ \mathrm{RE}(\mathrm{Frm}_T \backslash \mathrm{Thm}_T)$$

$$\rightarrow \mathrm{Rek}(\mathrm{Frm}_T \backslash \mathrm{Thm}_T)$$

$$\rightarrow \mathrm{Rek}(\overset{\mathrm{IN}}{-} (\mathrm{Frm}_T \backslash \mathrm{Thm}_T) \wedge \text{oben:}] \ \overset{\mathrm{IN}}{-} (\mathrm{Frm}_T \backslash \mathrm{Thm}_T) =$$

$$= \overset{\mathrm{IN}}{-} \mathrm{Frm}_T \cup \mathrm{Thm}_T$$

$$\rightarrow \mathrm{Rek}(\overset{\mathrm{IN}}{-} \mathrm{Frm}_T \cup \mathrm{Thm}_T) \wedge \mathrm{Rek}(\mathrm{Frm}_T)$$

$$\rightarrow \mathrm{Rek}(\overset{\mathrm{IN}}{-} \mathrm{Frm}_T \cup \mathrm{Thm}_T \dot{\cap} \mathrm{Frm}_T),$$

$$\rightarrow \mathrm{Rek}(\mathrm{IN} \cap - \mathrm{Frm}_T \cap \mathrm{Frm}_T \dot{\cup} \mathrm{Thm}_T \cap \mathrm{Frm}_T)$$

$$\rightarrow \mathrm{Rek}(\mathrm{Thm}_T \cap \mathrm{Frm}_T) \wedge \mathrm{Thm}_T \subseteq \mathrm{Frm}_T$$

$$\rightarrow \mathrm{Rek}(\mathrm{Thm}_T) \wedge 1c] \mathrm{Thm}_T = \mathrm{Thm}_{T^*} = EAx_{T^*}$$

$$\rightarrow \mathrm{Rek}(EAx_{T^*}) \wedge \mathrm{Erw}(T^*, T) \wedge \mathrm{Erw} \wedge (T, Z_p) \wedge$$

$$\wedge [\mathrm{Cst}\ T \leftrightarrow] \mathrm{Cst}\ T^*$$

$$\rightarrow \mathrm{Erw}(T^*, Z_p) \wedge \mathrm{Rek}(EAx_{T^*}) \wedge \mathrm{Cst}(T^*)$$

$$\rightarrow 1.\mathrm{Unvollständigkeitssatz} \rightarrow] \neg \mathrm{Vst}(T^*)$$

$$\rightarrow \neg \mathrm{Vst}(T^*) \wedge \mathrm{H}y2] \mathrm{Vst}\ T \wedge T \overset{\mathrm{Ded}}{\sim} T^*, \mathrm{Vst}(T^*), \lambda$$

$\mathrm{Erw}(T, Z_\mathrm{p}) \wedge \mathrm{Max}\,\mathrm{Cst}(T) \rightarrow \neg \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T)$

Als Corollar ergibt sich wegen des Vollständigkeits- und Korrektheitssatzes $\text{T-Val} = \mathrm{Thm}_T$:

$$\mathrm{Erw}(T, Z_\mathrm{p}) \wedge \mathrm{Max}\,\mathrm{Cst}(T) \rightarrow [\neg \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T) \leftrightarrow] \neg \mathrm{RE}(\text{T-Val})$$

Als weiteres Corollar ergibt sich, daß in einer maximal konsistenten Erweiterung von Z_p auch die außerlogischen Theoreme von T nicht r.e. sind:

$$\mathrm{Erw}(T, Z_\mathrm{p}) \wedge \mathrm{Max}\,\mathrm{Cst}(T) \dot{\rightarrow}$$

$$\dot{\rightarrow}\ \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T \backslash \mathrm{Thm}_L) \rightarrow \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T \cap - \mathrm{Thm}_L) \wedge \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_L)$$

$$\rightarrow \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T \cap - \mathrm{Thm}_L \dot{\cup} \mathrm{Thm}_L)$$

$$\rightarrow \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T \cup \mathrm{Thm}_L) \wedge \mathrm{Thm}_L \subseteq$$

$$\subseteq \mathrm{Thm}_T, \mathrm{Thm}_T = \mathrm{Thm}_T \cup \mathrm{Thm}_L$$

$$\rightarrow \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T)$$

$$\rightarrow [\neg \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T) \rightarrow] \neg \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T \backslash \mathrm{Thm}_L)$$

$\mathrm{Erw}(T, Z_\mathrm{p}) \wedge \mathrm{Max}\,\mathrm{Cst}(T) \rightarrow \neg \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T \backslash \mathrm{Thm}_L)$

Ferner: $\mathrm{Erw}(T, Z_\mathrm{p}) \wedge \mathrm{Max}\,\mathrm{Cst}(T) \wedge \mathrm{Inexpansiv}(T) \rightarrow Ax_T = \mathrm{Thm}_T$

$$\rightarrow Ax_T \backslash \mathrm{Thm}_L = \mathrm{Thm}_T \backslash \mathrm{Thm}_L$$

$$\rightarrow EAx_T = \mathrm{Thm}_T \backslash \mathrm{Thm}_L$$

$$\rightarrow \neg \mathrm{RE}(EAx_T)$$

$$[\leftrightarrow \neg \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T \backslash \mathrm{Thm}_L)]$$

$$\mathrm{Erw}(T, Z_p) \wedge \mathrm{Max}\,\mathrm{Cst}(T) \wedge \mathrm{Inexpansiv}(T) \dot{\rightarrow} \neg \mathrm{RE}(\mathrm{EAx}_T)$$

Man erhält leicht folgendes Kriterium für Inexpansiv

$$\underline{\mathrm{Max\,Cst}\,T \dot{\rightarrow} \mathrm{Inexpan}(T) \leftrightarrow \bigwedge_{\mathscr{A}\in \mathrm{Frm}_T} \mathscr{A} \in Ax_T \vee \neg \bigwedge_{\dots} \mathscr{A} \in Ax_T.}$$

$$\begin{aligned}
&\phantom{\mathrm{Max\,Cst}\,T \rightarrow \mathrm{Inexpan}(T) \rightarrow{}} \mathrm{Vst}\,T \rightarrow]\\
&\mathrm{Max\,Cst}\,T \overset{\alpha)}{\rightarrow} \mathrm{Inexpan}(T) \rightarrow \bigwedge_{\mathscr{A}\in \mathrm{Frm}_T} \cdot \vdash_T \mathscr{A} \vee \vdash_T \neg \bigwedge_{\dots} \mathscr{A} \wedge Ax_T = \mathrm{Thm}_T\\
&\qquad \rightarrow \bigwedge_{\mathscr{A}\in \mathrm{Frm}_T} \cdot \mathscr{A} \in Ax_T \vee \neg \bigwedge_{\dots} \mathscr{A} \in Ax_T.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\beta)}{\rightarrow} \bigwedge_{\mathscr{A}\in \mathrm{Frm}_T} \cdot \mathscr{A} \in Ax_T \vee \neg \bigwedge_{\dots} \mathscr{A} \in Ax_T \dot{\rightarrow} \bigwedge_{\mathscr{A}} \cdot \vdash_T \mathscr{A} \dot{\rightarrow}\\
&\qquad \dot{\rightarrow} \mathscr{A} \notin Ax_T \rightarrow \neg \bigwedge_{\dots} \mathscr{A} \in Ax_T.\\
&\qquad\qquad \rightarrow \vdash_T \neg \bigwedge_{\dots} \mathscr{A}, \bigwedge_{\dots} \mathscr{A}\\
&\qquad\qquad \rightarrow \neg\,\mathrm{Cst}\,T, \curlywedge\\
&\qquad \rightarrow \bigwedge_{\mathscr{A}} \cdot \vdash_T \mathscr{A} \underset{\mathrm{triv}}{\rightleftarrows} \mathscr{A} \in Ax_T., Ax_T = \mathrm{Thm}_T\\
&\qquad \rightarrow \mathrm{Inexpan}(\mathrm{T})
\end{aligned}$$

Sei T_ω die durch die Lindenbaum'sche Theorienfolge definierte Theorie über Z_p, für die bekanntlich gilt:

$$\mathrm{Cst}\,Z_p \rightarrow \mathrm{Erw}(T_\omega, Z_p) \wedge \mathrm{Max\,Cst}(T_\omega)$$

Mittels der Definitionen für die Theorienfolge und T_ω zeigt man leicht, daß gilt:

$$\mathrm{Cst}\,Z_p \rightarrow \bigwedge_{\mathscr{A}\in \mathrm{Frm}_{T_\omega}} \cdot \mathscr{A} \in Ax_{T_\omega} \vee \neg \bigwedge_{\dots} \mathscr{A} \in Ax_{T_\omega}$$

$\rightarrow$ mittels des vorigen Kriteriums: Inexpans (T_ω)

und $\mathrm{Cst}\,Z_\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{Erw}(T_\omega, Z_\mathrm{p}) \wedge \mathrm{Max\,Cst}(T_\omega) \wedge \mathrm{Inexpans}(T_\omega)$

$\rightarrow$ mittels vorigen Lemmas: $\neg\,\mathrm{RE}(EAx_{T_\omega})$

$$\mathrm{Cst}\,Z_\mathrm{p} \rightarrow \neg\,\mathrm{RE}(EAx_{T_\omega}) \wedge \neg\,\mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_{T_\omega})$$

Der eben bewiesene Satz $\bigwedge_T \cdot \mathrm{Erw}(T, Z_\mathrm{p}) \wedge \mathrm{Max\,Cst}(T) \rightarrow \neg\,\mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T)$.

kann, wie gesagt, im dem Sinn als Äquivalent des 1. Unvollständigkeitssatzes betrachtet werden, als zu seinem Beweis der 1. Unvollständigkeitssatz verwendet wurde, andererseits sich aus diesem Satz der 1. Unvollständigkeitssatz sofort ergibt:

Aus $\mathrm{Rek}\,(EAx_T) \to \mathrm{RE}\,(\mathrm{Thm}_T)$ ergibt sich durch Transposition und implikative Vorschaltung $\mathrm{Erw}\,(T, Z_\mathrm{P}) \wedge \mathrm{Max\,Cst}\,T \dot{\to} \neg\,\mathrm{RE}\,(\mathrm{Thm}_T) \to \neg\,\mathrm{Rek}\,(EAx_T)$, ferner durch Anwendung von FL_2, Generalisierung und Allquantordistribution sowie Umbenennung gebundener Variablen im Hinterglied

$$\bigwedge_T \cdot \mathit{Erw}\,(T, Z_\mathrm{P}) \wedge \mathrm{Max\,Cst}\,(T) \to \neg\,\mathrm{RE}\,(\mathrm{Thm}_T). \to$$

$$\to \bigwedge_{T'} \cdot \mathrm{Erw}\,(T', Z_\mathrm{P}) \wedge \mathrm{Max\,Cst}\,(T') \to \neg\,\mathrm{Rek}\,(EAx_{T'}).$$

$$\to \mathit{Erw}\,(T, Z_\mathrm{P}) \wedge \mathrm{Max\,Cst}\,(T) \to \bigwedge_{T'} \cdot T' \overset{\mathrm{Ded}}{\sim} T \to$$

$$\to \mathrm{Erw}\,(T', Z_\mathrm{P}) \wedge \mathrm{Max\,Cst}\,(T')$$

$$\to \text{Vorvorzeile:]}\ \neg\,\mathrm{Rek}\,(EAx_{T'})$$

$$\to \neg \bigvee_{T' \,\mathrm{Ded}\, T} \mathrm{Rek}\,(EAx_{T'})$$

$$\to \bigwedge_T \cdot \mathrm{Erw}\,(T, Z_\mathrm{P}) \wedge \mathrm{Max\,Cst}\,(T) \to \neg\,\mathrm{Rek\ Axiomatisierbar}\ (T).$$

$$\to \neg \bigvee_T \cdot \mathrm{Erw}\,(T, Z_\mathrm{P}) \wedge \mathrm{Rek\,Axbar}\,(T) \wedge \mathrm{Cst}\,T \wedge \mathrm{Vst}\,(T).$$

$\to$ 1. Unvollständigkeitssatz

Es sei bemerkt, daß die Umkehr des Satzes $\bigwedge_{T \in \mathrm{Theorie\ I}} \cdot \mathrm{Rek}\,(EAx_T) \to \mathrm{RE}\,(\mathrm{Thm}_T)$. nicht gilt: Mit $L^* = L\left[\left\{\mathscr{A} \,\middle|\, \underset{L}{\vdash} \mathscr{A}\right\}\right]$ gilt wie bei 1c: $\mathrm{Thm}_L = \mathrm{Thm}_{L^*} = EAx_{L^*}$

ergo: $\left[\neg\,\mathrm{Rek}\,(\mathrm{Thm}_L) \leftrightarrow\right] \neg\,\mathrm{Rek}\,(EAx_{L^*}) \dot{\wedge} [\mathrm{RE}\,(\mathrm{Thm}_L) \leftrightarrow]\,\mathrm{RE}\,(\mathrm{Thm}_{L^*})$

also $\bigvee_{T \in \mathrm{Theorie\ I}} \cdot \mathrm{RE}\,(\mathrm{Thm}_T) \wedge \neg\,\mathrm{Rek}\,(EAx_T)$.

Dagegen läßt sich unter Verwendung des bekannten Satzes als Prämisse $\mathrm{Inf}\,(M) \dot{\to} \mathrm{Rek}\,(M) \leftrightarrow \bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Func}\,(f) \wedge \mathrm{wb}\,(f) = \mathrm{M} \wedge \bigwedge_n \cdot f(n) < f(n+1)$.

zeigen, daß folgende Beziehung gilt:

$$\mathrm{RE}\,(\mathrm{Thm}_T) \leftrightarrow \bigvee_{T'} \cdot T' \overset{\mathrm{Ded}}{\sim} T \wedge \mathrm{Rek}\,(EAx_{T'}) \cdot$$

$$\leftrightarrow \mathrm{Rek\,Axbar}\,(T)$$

woraus sich auch von hier aus die Äquivalenz des 1. Unvollständigkeitssatzes mit dem zuvor anderweitig bewiesenen Satz ergibt:

$$\bigwedge_T \cdot \mathrm{Erw}(T, Z_\mathrm{p}) \wedge \mathrm{Max\,Cst\,T} \to \neg\, \mathrm{RE}\,(\mathrm{Thm}_T).$$

$$\leftrightarrow \bigwedge_T \cdot \mathrm{Erw}\,(T, Z_\mathrm{p}) \wedge \mathrm{Max\,Cst}\, T$$

$$\to \neg\, \mathrm{Rek\,Axbar}\,(T)\cdot$$

$$\leftrightarrow 1.\ \text{Unvollständigkeitssatz}$$

Zunächst beweisen wir:

$$\mathrm{M} \subseteq \mathbb{N} \wedge \mathrm{Inf}(\mathrm{M}) \dot{\to} \mathrm{Rek}\,(\mathrm{M}) \leftrightarrow \bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Func}\,(f) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f\,(n) < f\,(n+1) \wedge \mathrm{wb}\,(f) = \mathrm{M}.$$

Problem 4c) von Shoenfield, Mathematical Logic p. 138.

1.) $\underline{\mathrm{Inf}\,(\mathrm{M}) \wedge n{\in}\mathrm{M} \wedge (\mu x)\,(\mathrm{M}(x)) < n \to \bigvee_{i\in\mathrm{M}} n = (\mu x)\,(\mathrm{M}(x) \wedge i < x)}$

(mit $\mathrm{M}(x) \leftrightarrow x{\in}\mathrm{M}$) denn:

$$\mathrm{Inf}\,(\mathrm{M}) \wedge n{\in}\mathrm{M} \wedge (\mu x)\,(x{\in}\mathrm{M}) < n \to$$

$$\to \bigvee_{a_0,\ldots,a_k\in M} \{x{\in}M | x < n\} = \{a_0, \ldots, a_k\} \wedge a_k = \max\{x{\in}M | x < n\}$$

$$\to a_k \in \{x{\in}M | x < n\}, a_k{\in}\mathrm{M} \wedge a_k < n$$

$$\to a_K{\in}\mathrm{M} \wedge n{\in}M \wedge a_k < n \wedge \bigwedge_x \cdot x{\in}\,\mathrm{M} \wedge a_k < x \dot{\to} x < n \to$$

$$\to x{\in}\mathrm{M} \wedge x < n.$$

$$\to x \leq a_k < x.$$

$$\to \perp$$

$$\to a_k{\in}\mathrm{M} \wedge n{\in}\mathrm{M} \wedge a_k < n \wedge \bigwedge_x \cdot x{\in}\mathrm{M} \wedge a_k < x \to n \leq x.$$

$$\to a_k{\in}\mathrm{M} \wedge n = (\mu x)\,(x{\in}\mathrm{M} \wedge a_k < x)$$

$$\to \mathrm{Part}] \quad \bigvee_{i\in\mathrm{M}} n = (\mu x)\,(x{\in}\mathrm{M} \wedge i < x)$$

2.) $\underline{\mathrm{Inf}\,(\mathrm{M}) \wedge \mathrm{Rek}\,(\mathrm{M}) \rightarrow \bigvee_{f} \cdot \mathrm{Rek\,Func}\,(f) \wedge}$

$\underline{\wedge \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f(n) < f(n+1) \wedge \mathrm{wb}(f) = \mathrm{M}.; \text{ denn:}}$

$\mathrm{Inf}\,(\mathrm{M}) \wedge \mathrm{Rek}\,(\mathrm{M}) \dot{\rightarrow}$

$\dot{\rightarrow} g(n) := (\mu x)(\mathrm{M}(x) \wedge n < x) \;\dot{\wedge}\; \bigvee_{n} \bigwedge_{x} \cdot x \in \mathrm{M} \rightarrow x \leq n \cdot \rightarrow$

$\rightarrow \bigvee_{n} \mathrm{M} \subseteq \{x | x \leq n\} \in \mathrm{Fin}, \;\; \mathrm{M} \in \mathrm{Fin}, \mathrm{Hy}]$ ⅄

$\dot{\wedge} \bigwedge_{n} \bigvee_{x} \cdot x \in \mathrm{M} \wedge n < x. \wedge \mathrm{Rek}\,(\mathrm{M}), (<), \;\; \text{ergo Rek Func}(g)$

$h(x,y) := g(\pi_2^2(x,y)), \quad \mathrm{Rek\,Func}\,(h)$

Indukt. Def von f:

$f(0) := (\mu x)\mathrm{M}(x), f(n+1) := h(n, f(n)), \mathrm{Rek\,Func}\,(h)$

$\wedge \mathrm{Rek}\,(\mathrm{M}) \rightarrow]\, \mathrm{Rek\,Func}\,(f)$

$f(n+1) = h(n, f(n)) = g(\pi_2^2(n, f(n)) = g(f(n)) = (\mu x)(\mathrm{M}(x) \wedge f(n) < x)$

also $f(n+1) = (\mu x)\,(\mathrm{M}(x)) \wedge f(n) < x)$, ergo $\mathrm{M}(f(n+1)) \wedge f(n) <$

$< f(n+1)$

$\mathrm{M}(f(0)) \wedge \bigwedge_{n} \cdot \mathrm{M}(f(n)) \overset{\mathrm{Veq}}{\rightarrow} \mathrm{M}(f(n+1)).,\ \mathrm{PM}\mathfrak{J}] \bigwedge_{n} \mathrm{M}(f(n))$

$\bigwedge_{y} \cdot y \in \mathrm{wb}(f) \rightarrow \bigvee_{n} y = f(n) \in \mathrm{M}., \;\; \mathrm{wb}(f) \subseteq \mathrm{M}$

$\mathrm{Inf}\,(\mathrm{M}) \wedge \mathrm{Rek}\,(\mathrm{M}) \rightarrow$
$\rightarrow \underline{\mathrm{M} \subseteq \mathrm{wb}(f)}$ denn:

$\rightarrow \bigwedge_{i<n} (i \in \mathrm{M} \rightarrow i \in \mathrm{wb}\,(f)) \rightarrow$

$\rightarrow n \in \mathrm{M} \rightarrow n = (\mu x)(x \in \mathrm{M}) \vee (\mu x)(x \in \mathrm{M}) < n$

$\rightarrow n = f(0) \;\; \dot{\vee} \;\; \mathrm{Inf}\,(\mathrm{M}) \wedge n \in \mathrm{M} \wedge (\mu x)\,(x \in \mathrm{M}) < n$

$\rightarrow n \in \mathrm{wb}(f) \dot{\vee}\;\; 1.) \rightarrow] \bigvee_{i\in\mathrm{M}} n = (\mu x)\,(\mathrm{M}(x) \wedge i < x),$

$i < n, \mathfrak{J}\mathrm{A}]\, i \in \mathrm{wb}(f)$

$\dot{\vee} \bigvee_{i \in M, k} n = (\mu x)(\mathrm{M}(x) \wedge i < x) \wedge i = f(k)$

$$\dot{\vee} \bigvee_{k} n = (\mu x)(\mathrm{M}(x) \wedge f(k) < x) \overset{\mathrm{Deff}}{=} f(k+1)$$

$$\dot{\vee}\ n \in \mathrm{wb}(f)$$

$$\to \bigwedge_{n} : \bigwedge_{i<n} (i \in \mathrm{M} \to i \in \mathrm{wb}(f)) \to (n \in \mathrm{M} \to n \in \mathrm{wb}(f)):$$

$$\mathrm{PV}\mathfrak{J}] \bigwedge_{n} \cdot n \in \mathrm{M} \to n \in \mathrm{wb}(f).$$

$$\to \mathrm{M} \subseteq \mathrm{wb}(f)$$

zusammen:

$$\mathrm{Inf}(\mathrm{M}) \dot{\to} \mathrm{Rek}(\mathrm{M}) \to \bigvee_{f} \cdot \mathrm{Rek\,Func}(f) \wedge \bigwedge_{n} f(n) < f(n+1) \wedge$$

$$\wedge\ \mathrm{wb}(f) = \mathrm{M}.$$

3.) $\underline{\mathrm{Inf}(\mathrm{M}) \dot{\to} \bigvee_{f} \cdot \mathrm{Rek\,Func}(f) \wedge \bigwedge_{n} f(n) < f(n+1) \wedge \mathrm{wb}(f) =}$

$\underline{= \mathrm{M}. \to \mathrm{Rek}(\mathrm{M})}$. denn:

$$\mathrm{Inf}(\mathrm{M}) \dot{\to} \mathrm{Rek\,Func}(f) \wedge \bigwedge_{n} f(n) < f(n+1) \wedge \mathrm{wb}(f) = \mathrm{M} \to$$

a)

$\to \underline{\bigwedge_{n} n \leqslant f(n)}$ denn: $0 \leqslant f(0) \wedge \bigwedge_{n} \cdot n \leqslant f(n) \to$

$$\to n \leqslant f(n) < f(n+1),$$

$$\to n+1 \leqslant f(n+1).$$

b)

$$\to \underline{\mathrm{M}(n) \leftrightarrow \bigvee_{k \leqslant n} f(k) = n}$$

α) $n \in \mathrm{M} \dot{\to} n \in \mathrm{wb}(f), \bigvee_{k} \cdot f(k) = n \wedge a) \to] k \leqslant f(k) =$

$$= n, \bigvee_{k \leqslant n} f(k) = n$$

$$n \in \mathrm{M} \to \bigvee_{k \leqslant n} f(k) = n$$

β) $k \leqslant n \wedge f(k) = n \to n \in \mathrm{wb}(f) = \mathrm{M}$

$$\bigvee_{k \leqslant n} f(k) = n \to n \in \mathrm{M}$$

$$\alpha, \beta] \bigwedge_{n} \cdot \mathrm{M}(n) \leftrightarrow \bigvee_{k \leqslant n} f(k) = n., \mathrm{Rek\,Func}(f) \to]$$

$$\mathrm{Rek}\left\{ n \,\middle|\, \bigvee_{k \leqslant n} f(k) = n \right\}, \text{ergo: } \mathrm{Rek}(\mathrm{M})$$

$$\mathrm{Inf}\,(\mathrm{M}) \dot{\rightarrow} \bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Func}\,(f) \wedge \bigwedge_n f(n) < f(n+1) \wedge \mathrm{wb}\,(f) = \mathrm{M} \cdot \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathrm{Rek}\,(\mathrm{M})$$

$$2{,}3 \rightarrow]\ \mathrm{Inf}\,(\mathrm{M}) \dot{\rightarrow} \mathrm{Rek}\,(\mathrm{M}) \leftrightarrow \bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Func}\,(f) \wedge \bigwedge_n f(n) <$$

$$< f(n+1) \wedge \mathrm{wb}\,(f) = \mathrm{M}.$$

Nun beweisen wir

$$\underline{\mathrm{RE}\,(\mathrm{Thm}_T) \leftrightarrow \mathrm{Rek\,Axbar}\,(\mathrm{T})}$$

1.) $\mathrm{RE}\ (\mathrm{Thm}_T) \rightarrow$

$$\rightarrow \bigvee_f \cdot \mathrm{Rek\,Func}\, f \wedge \mathrm{wb}\,(f) = \mathrm{Thm}_T .\, [\vee\ \mathrm{Thm}_T = \emptyset]$$

$\rightarrow$ zunächst 3 involvierte Definitionen

$$\mathrm{D}_1\!:\ \mathscr{E}Ax_{T'} = \left\{ \mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n / n \in \mathbb{N} \wedge \bigwedge_{i \leqslant n} \ulcorner \mathscr{A}_i \urcorner = f(i) \right\}$$

$$\mathrm{D}_2\!:\ EAx_{T'} = \left\{ \ulcorner \mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n \urcorner / n \in \mathbb{N} \wedge \bigwedge_{i \leqslant n} \ulcorner \mathscr{A}_i \urcorner = f(i) \right\}$$

D_3: Mit $S(x) := x'$

$$h(y,z) := [SZ_\wedge, y, z],\ \varphi(n,y) := f(S(\pi_1^2(n,y)))$$

$$H(n,y) := h(\pi_2^2(n,y), \varphi(n,y))$$

und $g(0) := f(0) \wedge \bigwedge_n g(n') := H(n, g(n))$ gelangt man durch Einsetzungen zu der nicht-schemagerechten induktiven Definition

$$g(0) = f(0)$$

$$g(n') = [SZ_\wedge, g(n), f(n')]$$

$$(g(n') = \mathrm{H}(n, g(n)) = h(\pi_2^2(n, g(n)), \varphi(n, g(n))) = h(\pi_2^2(n, g(n)),$$

$$f(S(\pi_1^2(n, g(n))))) = h(g(n), f(n')) = [SZ_\wedge, g(n), f(n')])$$

Da $f, S, \mathrm{h}, \varphi, \mathrm{H} \in \mathrm{Rek\,Func}$ ist $\mathrm{Rek\,Func}\,(g)$

$\mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T) \dot{\rightarrow}$

a)

$\dot{\rightarrow}\ \underline{T' \overset{\mathrm{Ded}}{\sim} T}$

$\alpha)\ \underline{\mathscr{B} \in \mathscr{E}\mathscr{A}x_{T'} \rightarrow \underset{T}{\vdash} \mathscr{B}}$

$$\mathscr{B} \in \mathscr{E}\mathscr{A}x_{T'} \rightarrow \bigvee_n \mathscr{B} \equiv \mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n \wedge \bigwedge_{i \leqslant n} \ulcorner \mathscr{A}_i \urcorner = f(i),$$

$$\bigwedge_{i \leqslant n} \ulcorner \mathscr{A}_i \urcorner \in \mathrm{wb}(f) = \mathrm{Thm}_T$$

$$\rightarrow \qquad \wedge \underset{T}{\vdash} \mathscr{A}_0, \ldots, \mathscr{A}_n$$

$$\rightarrow \bigvee_n \mathscr{B} \equiv \mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n \wedge \underset{T}{\vdash} \mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n$$

$$\rightarrow \underset{T}{\vdash} \mathscr{B}$$

$\beta)\ \underline{\underset{T}{\vdash} \mathscr{A} \rightarrow \underset{T'}{\vdash} \mathscr{A}}$

$$\underset{T}{\vdash} \mathscr{A} \rightarrow \ulcorner \mathscr{A} \urcorner \in \mathrm{Thm}_T = \mathrm{wb}(f)$$

$$\rightarrow \bigvee_{i \in \mathbb{N}} \ulcorner \mathscr{A} \urcorner = f(i) = \ulcorner \mathscr{A}_i \urcorner \wedge \bigwedge_{j \leqslant i} \ulcorner \mathscr{A}_j \urcorner = f(j)$$

$$\rightarrow \mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_i \in \mathscr{E}Ax_{T'}, \underset{T'}{\vdash} \mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_i, \underset{T'}{\vdash} \mathscr{A}_i, \underset{T'}{\vdash} \mathscr{A}$$

$$\underset{T}{\vdash} \mathscr{A} \rightarrow \underset{T'}{\vdash} \mathscr{A}$$

$\gamma)\ \underline{\underset{T'}{\vdash} \mathscr{A} \rightarrow \underset{T}{\vdash} \mathscr{A}}$

$$\underset{T'}{\vdash} \mathscr{A} \rightarrow \bigvee_{\mathscr{A}_{j_0}, \ldots, \mathscr{A}_{j_k} \in \mathrm{EAx}_{T'}} \mathscr{A}_{j_0}, \ldots, \mathscr{A}_{j_k} \underset{L}{\vdash} \mathscr{A}$$

$$\rightarrow \bigvee_{\mathscr{A}_{j_0}, \ldots, \mathscr{A}_{j_k}} \alpha) \rightarrow] \underset{T}{\vdash} \mathscr{A}_{j_0}, \ldots, \mathscr{A}_{j_k} \dot{\wedge} \mathscr{A}_{j_0}, \ldots, \mathscr{A}_{j_k} \underset{L}{\vdash} \mathscr{A}$$

$$\rightarrow \underset{T}{\vdash} \mathscr{A}$$

$$\rightarrow \beta, \gamma) \rightarrow]\, T' \overset{\mathrm{Ded}}{\sim} T$$

b)

$\to\alpha)$ Rek Func $(g) \wedge \bigwedge_n g(n) < g(n+1)$, wie sich aus der Def für g ergibt.

$\to\beta)$ $\underline{\mathrm{wb}(g) = \mathrm{EAx}_{T'}}$

1.) $\underline{\bigwedge_n g(n) = \ulcorner\mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n\urcorner}$ $\quad$ $\mathrm{M}\mathfrak{J}$'n $\quad \bigwedge_i \ulcorner\mathscr{A}_i\urcorner = f(i)$

$$g(0) = f(0) = \ulcorner\mathscr{A}_0\urcorner$$

$$g(n) = \ulcorner\mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n\urcorner \to g(n+1) = [SZ_\wedge, g(n), f(n+1)]$$

$$\overset{\mathfrak{J}A}{=} [\mathrm{SZ}_\wedge, \ulcorner\mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n\urcorner, \ulcorner\mathscr{A}_{n+1}\urcorner]$$

$$\to g(n+1) = \ulcorner(\mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n) \wedge \mathscr{A}_{n+1}\urcorner$$

$$\mathrm{PM}\mathfrak{J}] \bigwedge_n g(n) = \ulcorner\mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n\urcorner$$

2.) $g(n) \in \{\ulcorner\mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_m\urcorner \mid m \in \mathbb{N} \wedge \bigwedge_{i \leqslant m} f(i) = \ulcorner\mathscr{A}_i\urcorner\} = \mathrm{EAx}_{T'}$

$$\bigwedge_n g(n) \in \mathrm{EAx}_{T'}$$

$$\bigwedge_y y \in \mathrm{wb}(g) \to \bigvee_x y = g(x) \in \mathrm{EAx}_{T'}$$

$$\mathrm{wb}(g) \subseteq \mathrm{EAx}_{T'}$$

3.) $y \in \mathrm{EAx}_{T'} \to \bigvee_n y = \ulcorner\mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n\urcorner \wedge \bigwedge_{i \leqslant n} \ulcorner\mathscr{A}_i\urcorner = f(i)$

$$\to n = 0 \to y = \ulcorner\mathscr{A}_0\urcorner = f(0) = g(0) = g(n)$$

$$n = m' \to y = \ulcorner(\mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_m) \wedge \mathscr{A}_{m+1}\urcorner$$

$$= [\mathrm{SZ}_\wedge, \ulcorner\mathscr{A}_0 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_m\urcorner, \ulcorner\mathscr{A}_{m+1}\urcorner]$$

β1.)

$$= [\mathrm{SZ}_\wedge, g(m), f(m+1)]$$

$$= g(m') = g(n)$$

$$\to \left[n = 0 \vee \bigvee_m n = m' \to \right] y = g(n)$$

$$\to y \in \mathrm{wb}(g)$$

$$\mathrm{EAx}_{T'} \subseteq \mathrm{wb}(g)$$

2.,3.) $\rightarrow$] $\mathrm{wb}(g) = \mathrm{EAx}_{T'}$

$\rightarrow \alpha)\ \beta)$ Part] $\bigvee_{g} \cdot \mathrm{Rek\,Func}(g) \wedge \bigwedge_{n} g(n) < g(n+1) \wedge \mathrm{wb}(g) = \mathrm{EAx}_{T'}$

$\rightarrow$ Prämisse] $\mathrm{Inf}(\mathrm{EAx}_{T'}) \rightarrow$] $\mathrm{Rek}(\mathrm{EAx}_{T'}) \wedge a)$] $T' \overset{\mathrm{Ded}}{\sim} T$

$\mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T) \rightarrow \bigvee_{T' \overset{\mathrm{Ded}}{\sim} T} \mathrm{Rek}(\mathrm{EAx}_{T'})$

2.) Die Umkehr mittels $\bigwedge_{T} \cdot \mathrm{Rek}(\mathrm{EAx}_T) \rightarrow \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T)$.:

$$T' \overset{\mathrm{Ded}}{\sim} T \wedge \mathrm{Rek}(\mathrm{EAx}_{T'}) \rightarrow \mathrm{Thm}_{T'} = \mathrm{Thm}_T \wedge \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_{T'})$$

$$\bigvee_{T' \overset{\mathrm{Ded}}{\sim} T} \mathrm{Rek}(\mathrm{EAx}_{T'}) \rightarrow \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T)$$

1,2] $\bigvee_{T' \overset{\mathrm{Ded}}{\sim} T} \mathrm{Rek}(\mathrm{EAx}_{T'}) \leftrightarrow \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T)$

$$\mathrm{Rek\,Axbar}(\mathrm{T}) \leftrightarrow \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_T)$$

Abschließend noch eine Bemerkung: Sei $\mathscr{N}$ das Standardmodell $\langle \mathbb{N}, 0, ', +, \cdot \rangle$ der natürlichen Zahlen und $Z_{\mathscr{N}} := L[\{\mathscr{A} \mid \mathrm{Val}(\mathscr{A}, \mathscr{N})\}]$.

α) Klarerweise ist $\mathrm{Erw}(Z_{\mathscr{N}}, Z_{\mathrm{P}})$

β) Wegen $\vdash_{Z_{\mathscr{N}}} \mathscr{A} \leftrightarrow \mathrm{Val}(\mathscr{A}, \mathscr{N})$ und $\bigwedge_{\mathscr{A} \in \mathrm{Frm}_{\mathscr{N}}} \neg(\mathrm{Val}(\mathscr{A}, \mathscr{N}) \wedge \mathrm{Val}(\neg \mathscr{A}, \mathscr{N}))$

$\bigwedge_{\mathscr{A} \in \mathrm{Frm}_{Z_{\mathscr{N}}}} . \mathrm{Val}(\mathscr{A}, \mathscr{N}) \vee \mathrm{Val}(\neg \bigwedge_{\ldots} \mathscr{A}, \mathscr{N})$

(aber $\neg \bigwedge_{\mathscr{A} \in \mathrm{Frm}_{Z_{\mathscr{N}}}} \mathrm{Val}(\mathscr{A}, \mathscr{N}) \vee \mathrm{Val}(\neg \mathscr{A}, \mathscr{N})$.)

ist $\mathrm{Cst}\, Z_{\mathscr{N}} \wedge \mathrm{Vst}\, Z_{\mathscr{N}}$, also $\mathrm{Max\,Cst}(Z_{\mathscr{N}})$
also aufgrund des bewiesenen Satzes: $\neg \mathrm{RE}(\mathrm{Thm}_{Z_{\mathscr{N}}})$

Die Sätze unvollständiger, rekursiv axiomatisierter Subsysteme der Zahlentheorie – wie des Peano- oder R. Robinsonformalismus-können bekanntlich durch einen Idealcomputer aufgezählt (ausgegeben) werden, die Sätze des vollständigen Systems der Zahlentheorie sind dagegen durch einen Idealcomputer nicht aufzählbar (ausgebbar).

Zusammenfassend kann gesagt werden: Es wurde zum 1. Unvollständigkeitssatz eine RE-Version angegeben und die Äquivalenz beider auf zwei verschiedene Weisen bewiesen.

Definitionszusammenstellung einiger verwendeter Konzepte

Die klassische Rekursionstheorie wird als bekannt vorausgesetzt, $\ulcorner \mathscr{A} \urcorner$ bedeutet die Gödelzahl der Formel $\mathscr{A}$.

Die rekursiven Funktionen neg und cls sind so definiert, daß $\mathrm{neg}(\ulcorner \mathscr{A} \urcorner) = [SZ_{\neg}, \ulcorner \mathscr{A} \urcorner] = \ulcorner \neg \mathscr{A} \urcorner$, ebenso cls $(\ulcorner \mathscr{A} \urcorner) = \ulcorner \bigwedge_{\ldots} \mathscr{A} \urcorner$, wobei $\bigwedge_{\ldots} \mathscr{A}$ den Abschluß (clausum) von $\mathscr{A}$ bedeutet; FreieVar '$\mathscr{A} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, so $\bigwedge_{\ldots} \mathscr{A} \equiv \bigwedge_{x_1, \ldots, x_n} \mathscr{A}$. Ist f eine n-stellige Funktion, so bedeutet G_f den Graphen von f und es gilt die Definition $G_f(x_1, \ldots, x_n, y) \leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n, y) = y$

Num: $= G_{\mathrm{num}}$, Cls: $= G_{\mathrm{cls}}$; χ_R bedeutet die charakteristische Funktion von R

$$\chi_R := \{\langle x_1, \ldots, x_n, y \rangle | R(x_1, \ldots, x_n) \wedge y = 1 \dot{\vee} \neg R(x_1, \ldots, x_n) \wedge y = 0\}$$

$\breve{R}$ ist die Converse von $R : \breve{R}(x, y) \leftrightarrow R(y, x)$

$$\mathrm{T} \circ \mathrm{S} \circ \mathrm{R} := \{\langle x, y \rangle | \bigvee_{u, v} \cdot R(x, u) \wedge \mathrm{S}(u, v) \wedge \mathrm{T}(v, y)\}; \ \mathrm{wb}(R) := \{y | \bigvee_{x} \mathrm{R}(x, y)\}$$

$$\mathrm{Cst}_{fo}(\mathrm{K}) :\leftrightarrow \bigvee_{\mathscr{A} \in \mathrm{Frm}_K} \not\vdash_K \mathscr{A}$$

$$\mathrm{Vst}(T) :\leftrightarrow \bigwedge_{\mathscr{A} \in \mathrm{Frm}_T} \vdash_T \mathscr{A} \vee \vdash_T \neg \bigwedge_{\ldots} \mathscr{A}$$

$$\leftrightarrow \bigwedge_{\mathscr{A} \in \mathrm{ClFrm}_T} \vdash_T \mathscr{A} \vee \vdash_T \neg \mathscr{A}$$ ClFrm_T bedeutet eine Formel ohne freie Variablen

$$\mathrm{Max\,Cst}(\mathrm{K}) :\leftrightarrow \mathrm{Cst}_{fo}(\mathrm{K}) \wedge \bigwedge_{\mathscr{A} \in \mathrm{Frm}_K} . \not\vdash_K \mathscr{A} \to \neg \mathrm{Cst}_{fo}(\mathrm{K}[\mathscr{A}]).$$

$$\mathrm{Max\,Cst}(\mathrm{T}) \leftrightarrow \mathrm{Cst}_{fo}(T) \wedge \mathrm{Vst}(T)$$

$$\vdash_K \mathscr{A} :\leftrightarrow \bigvee_{S \in \mathrm{Fin\,Frm\,Seq}} : s_{\lg s - 1} = \mathscr{A} \wedge \bigwedge_{i < \lg s} \cdot s_i \in \mathrm{Axiom}_K \vee \vee \bigvee_{\substack{j_1, \ldots j_n < i \\ r \in \mathrm{Grund\,Regel}_K}} r(s_{j_1}, \ldots, s_{j_n}, s_i)$$

$$\mathrm{Erw}(K', K) :\leftrightarrow \mathrm{Grund\,Reg}_{K'} = \mathrm{Grund\,Reg}_K \wedge \bigwedge_{\mathscr{A}} \cdot \vdash_K \mathscr{A} \to \vdash_{K'} \mathscr{A}.$$

$$T' \overset{\mathrm{Ded}}{\sim} T :\leftrightarrow \bigwedge_{\mathscr{A}} \cdot \vdash_{T'} \mathscr{A} \leftrightarrow \vdash_{T'} \mathscr{A}.$$

Frm_T, Thm_T bedeuten je nach dem Kontext die syntaktischen Gebilde Formel von T oder Theorem in T oder die arithmetische T-Formelzahl oder T-Theoremzahl.

$$\mathrm{Inexpansiv}(\mathrm{K}) :\leftrightarrow \mathrm{Thm}_K = \mathrm{Axiom}_K$$

$$\mathrm{EAxiom}_T := \mathrm{Axiom}_T \setminus \mathrm{Thm}_L$$

$$T\text{-Val} := \{\mathscr{A} \mid \bigwedge_{\mathscr{M}} \cdot \mathrm{Mod}(\mathscr{M}, T) \to \mathrm{Val}(\mathscr{A}, \mathscr{M}).\}$$

$$= \left\{\mathscr{A} \mid \bigwedge_{\mathscr{M}} \cdot \mathrm{Mod}(\mathscr{M}, T) \to \bigwedge_{v:\mathrm{Var}\to|\mathscr{M}|} \mathscr{A}_{\langle \mathscr{M}, v\rangle} = 1.\right\}$$

$$Z_p := L\Big[0,', +, \cdot; x' \neq 0, x' = y' \to x = y, \mathscr{A}(0) \wedge \bigwedge_x \cdot \mathscr{A}(x) \to \mathscr{A}(x') \cdot \dot{\to} \bigwedge_x \mathscr{A}(x),$$

$$x + 0 = x, x + y' = (x + y)', x \cdot 0 = 0, x \cdot y' = x \cdot y + x\Big]$$

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Dr. Curt C. Christian, Straßergasse 43–47, A-1190 Wien.