

Zu den kongruenten Kreisen eines linearen parabolischen Kreissystems der isotropen Ebene

Von

J. Tölke

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 10. Oktober 1996
durch das k. M. Hellmuth Stachel)

Einleitung

Nach [8] bestimmen die Schnittpunkte von vier kongruenten isotropen Kreisen eines *linearen parabolischen Kreissystems*¹ \mathcal{S} [3] i.a. eine *Tridens-Kurve* 3. Ordnung – Kurven, die von D. Palman [2] und H. Sachs [5] untersucht wurden. In Sonderfällen kann dieser Schnittpunkt auch eine spezielle Hyperbel bzw. ein Geradenpaar bestimmen, wobei dann genau eine Gerade isotrop ist.

Sind $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ drei fest gewählte kongruente Kreise aus \mathcal{S} , so können wir – eventuell nach Ausübung einer geeigneten isotropen *Spiegelung* [3] – annehmen, daß ihre Schnittpunkte ein (zulässiges) Dreieck $S = \Delta(S_{12}, S_{13}, S_{23})$ bestimmen. Der Radius des Umkreises $u(S)$ sei mit r_u bezeichnet. Die Kreise κ_i definieren über ihre Schnittpunkte als Grundpunkte ein *Kegelschnittbüschel* \mathcal{B} welches nach der Klassifikation von V. Scuric [6] vom Typ I_8 ist. Umgekehrt bestimmt ein Kegelschnittbüschel \mathcal{B} vom Typ I_8 ∞^1 lineare parabolische Kreissysteme \mathcal{S} . Denn drei kongruente Kreise κ_i durch je genau zwei Ecken S_{ik}, S_{ij} des eigentlichen

¹Nach [3, S. 56] besteht ein lineares parabolisches Kreissystem aus allen Kreisen, die einen festen Kreis bzw. eine feste nicht isotrope Gerade berühren.

Grunddreiecks S von \mathcal{B} besitzen genau einen *Apollonischen Berührkreis* $K(S)$ [1, 3],

Ist dann β aus \mathcal{B} ein beliebiger von $u(S)$ verschiedener Kegelschnitt, so bestimmen seine von S_{ik} verschiedenen Schnittpunkte mit den Kreisen κ_i jeweils einen Kreis $\kappa(\beta)$. Alle so erhaltenen Kreise sind kongruent. Mit r als Radius der Kreise κ_i bilden sie genau für $2r + r_u = 0$ ein *Kreisshyperoskulationsbüschel*. In der Klassifikation von H. Sachs [4] ist dies der Typ B7. Andernfalls gehören die Kreise $\kappa(\beta)$ dem durch die drei kongruenten Kreise κ_i bestimmten linearen parabolischen Kreissystem an. Sie sind genau dann zu den Kreisen κ_i kongruent, wenn $r + r_u = 0$ gilt. Geometrisch besagt dies, daß der Apollonische Berührkreis der Kreise κ_i Umkreis jenes Dreiecks ist, dessen Seitenmittendreieck das Schnittpunktdreieck S der Kreise κ_i ist.

Bezeichnet $\kappa \in \mathcal{S}$ einen beliebigen, zu den drei kongruenten Kreisen $\kappa_i \in \mathcal{S}$ kongruenten Kreis, so betrachten wir die Schnittpunkte des Kreisquadrupels $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa\}$. Ist $\kappa \neq \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, so liegen die Schnittpunkte des Kreisquadrupels genau dann auf einem Kegelschnitt $\beta \neq u(S)$ des durch S bestimmten Kegelschnittbüschels \mathcal{B} , wenn $r + r_u = 0$ gilt. Bei Erfülltsein dieser Bedingung kann so jeder Kegelschnitt $\beta \neq u(S)$ von \mathcal{B} erhalten werden. Da das Kreisquadrupel für $\kappa = \kappa_i$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) trivialerweise den einzigen Kreis $u(S)$ von \mathcal{B} bestimmt, haben wir somit eine *geometrische Erzeugung* der Kegelschnittbüschel vom Typ I_8 gewonnen.

Aufgrund dieser Ausführungen beginnen wir nachstehende Untersuchungen mit einer theoretischen und konstruktiven Behandlung des *Apollonischen Berührproblems für Fall dreier kongruenter Kreise*. J. Lang [1] hat ein konstruktives Lösungsverfahren mit Methoden der projektiven Geometrie aufgezeigt. H. Sachs [3] gibt einen Existenzbeweis mittels der pentazyklischen Koordinaten. Im Falle dreier kongruenter Kreise sind Sonderüberlegungen nötig. Diese liefern zugleich eine geometrische Deutung der von K. Strubecker [7] in die isotrope Dreiecksgeometrie eingeführten *Schwergeraden*.

§ 1. Das Apollonische Berührproblem für drei kongruente Kreise mit einem Schnittpunktdreieck

1. Bezeichnet r ($\neq 0$) den Radius der kongruenten Kreise $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ mit einem Schnittpunktdreieck $S := \Delta(S_{12}, S_{13}, S_{23})$, $S_{ij} := \kappa_i \cap \kappa_j :=: S_{ij}$, so gilt für den Radius R des Apollonischen Berührkreises K sicher $R \neq r$. Durch eine isotrope Bewegung können wir erreichen, daß die Schnittpunkte S_{ij} der Kreise die Koordinaten $(\zeta A, B, \lambda \in \mathbb{R})$

$$S_{12} = (0, 0), S_{13} = (\zeta A, 0), S_{23} = (\lambda B, B) \quad \text{mit} \quad \lambda AB(\lambda B - A) \neq 0 \quad (1)$$

bekommen. Für den Radius r_u des Umkreises von $\Delta(S_{12}, S_{13}, S_{23})$ gilt

$$r_u = \{\lambda(\lambda B - A)\}^{-1}. \quad (2)$$

Damit ergibt sich die Darstellung der drei kongruenten Kreise κ_i mit dem Radius r ($\neq r_u$) zu

$$\begin{aligned} \kappa_1: \quad y &= rx(x - A), & \kappa_2: \quad y &= rx^2 + (1 - r\lambda^2 B)\lambda^{-1}x, \\ \kappa_3: \quad y &= (x - A)\{rx + \lambda B(r_u - r)\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Für den Apollonischen Berührungskreis K folgt

$$K: \quad y = \frac{1}{4}(3r + r_u)x^2 + \frac{1}{2\lambda}\{1 - \lambda r(A + \lambda B)\}x + \frac{r_u - r}{4\lambda^2 r_u^2}. \quad (4)$$

Die Berührungspunkte B_i von κ_i und K bestimmen sich zu

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(-\lambda B + A, \frac{rB}{r_u}\right), & B_2 &= \left(\lambda B - A, \frac{1 - \lambda rA}{\lambda^2 r_u}\right), \\ B_3 &= (\lambda B + A, \lambda B\{rA + \lambda B r_u\}). \end{aligned} \quad (5)$$

Die Ausdrücke (5) legen es nahe, jenes Dreieck $D := \Delta(D_1, D_2, D_3)$ zu betrachten, welches das Dreieck $\Delta(S_{12}, S_{13}, S_{23})$ als Seitenmittendreieck besitzt. Wir haben

$$D_1 = (-\lambda B + A, -B), \quad D_2 = (\lambda B - A, B), \quad D_3 = (\lambda B + A, B), \quad (6)$$

wobei S_{ij} der Seitenmittelpunkt von D_1 und D_j ist. Nach K. Strubecker [7] ist die *Schwergerade* eines zulässigen Dreiecks als jener Punktort erklärt, für welchen die Summe der isotropen Lotabstände von den Dreiecksseiten verschwindet. In [7] werden für sie mehrere geometrische Eigenschaften und lineare Konstruktionen angegeben. Mit den Verbindungsgeraden

$$D_1 \nu D_2: \quad y = \lambda B r_u x, \quad D_1 \nu D_3: \quad y = \frac{1}{\lambda}(x - A), \quad D_2 \nu D_3: \quad y = B \quad (7)$$

folgt für die *Schwergerade* d_s [7, S.508] des Dreiecks D die Darstellung

$$d_s: \quad y = \frac{1}{3}r_u(2\lambda B - A)x + \frac{1}{3}\lambda^{-2}r_u^{-1}. \quad (8)$$

Der Apollonische Berührungskreis K ist genau für $3r + r_u = 0$ eine Gerade, und zwar nach (4) und (8) die Schwergerade d_s . Damit haben wir nebenbei folgende *geometrische Deutung der Schwergeraden* erhalten. Mit [7, S.556] folgt (s. Abb.1).

Satz 1. Die Schwergerade eines zulässigen Dreiecks der isotropen Ebene ist jene Gerade, zu der es drei sie berührende und jeweils durch

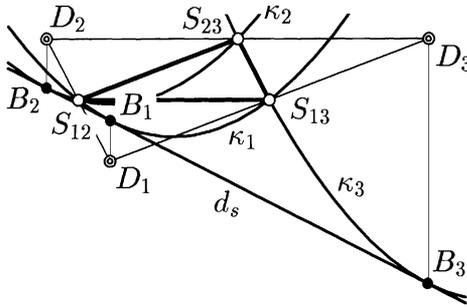


Abb. 1. Die Schwergerade d_s des Dreiecks D als Apollonische Berührgerade der Kreise κ_i ($3r + r_u = 0$)

genau zwei Ecken des zugehörigen Seitenmittendreiecks gehende kongruente Kreise gibt. Der Radius dieser drei Kreise ist gleich dem $2/3$ -fachen des Umkreisradius des gegebenen Dreiecks.

Für das Apollonische Berührproblem gilt wegen (5) and (6)

Satz 2. Drei kongruente Kreise κ_i der isotropen Ebene mit einem Schnittpunktdreieck $S := \Delta(S_{12}, S_{13}, S_{23})$ ($S_{ij} := \kappa_i \cap \kappa_j$) besitzen genau dann eine gemeinsame Tangente, wenn für ihren Radius r die Beziehung $3r + r_u = 0$ gilt, wobei r_u der Radius des Umkreises des Dreiecks S ist. Diese Tangente ist dann zugleich Schwergerade d_s des Dreiecks D , welches S als Seitenmittendreieck besitzt. Die Tangentenberührungspunkte sind die isotropen Projektionen der Ecken von D auf d_s (s. Abb.1).

Damit ist die *Konstruktion* der Apollonischen Berührgeraden bei gegebenem (zulässigem) Schnittpunktdreieck S linear ausführbar. Über ihre Berührungspunkte B_i lassen sich dann die Kreise κ_i etwa mittels des Peripheriewinkelsatzes [3, S.32] konstruieren.

2. Im allgemeinen Fall $3r + r_u \neq 0$, in dem die Berührungspunkte B_i ein Dreieck bilden, sind die Dreiecke $\Delta(D_1, D_2, D_3)$ und $\Delta(B_1, B_2, B_3)$ nach (5) and (6) *perspektiv affin oder zusammenfallend*. Letzteres tritt genau für $r + r_u = 0$ ein. Wir kommen hierauf auch im 4. Abschnitt zurück. Über die Darstellung der Dreiecksseiten

$$B_1 \nu B_2: \quad y = \frac{1 - \lambda r(A + \lambda B)}{2\lambda} x + \frac{1}{2} \frac{r + r_u}{\lambda^2 r_u^2},$$

$$B_1 \nu B_3: \quad y = \frac{1}{2} \{2rA + \lambda B(r_u - r)\} x + \frac{2rA + \lambda B(r + r_u)}{2\lambda r_u}$$

$$B_2 \nu B_3: \quad y = \frac{1}{2} (r + r_u) (2\lambda B - A) x - \frac{2r\lambda B + A(r + r_u)}{2\lambda r_u}$$

sehen wir dann: Die Dreiecke $\Delta(D_1, D_2, D_3)$ und $\Delta(B_1, B_2, B_3)$ haben dieselbe Schwergerade d_s . Wie man den Darstellungen der Geraden $B_i \nu B_i$ und denen der Verbindungsgeraden $D_i \nu D_i$ nach kurzer Zwischenrechnung entnimmt, ist im Falle $r + r_u \neq 0$ d_s zugleich die Affinitätsachse.

Satz 3. Zu drei kongruenten Kreisen κ_i der isotropen Ebene mit dem Radius r und einem Schnittpunktdreieck $S := \Delta(S_{12}, S_{13}, S_{23})$, wobei $S_{ij} := \kappa_i \cap \kappa_j$ gesetzt wurde, existiert genau ein Kreis K , der κ_1, κ_2 und κ_3 berührt. Bilden die Berührungspunkte $B_i \in \kappa_i, K$ ein Dreieck $B := \Delta(B_1, B_2, B_3)$ und bezeichnet r_u den Umkreisradius von S , so ist B für $r + r_u \neq 0$ perspektiv affin zu jenem Dreieck D , welches S als Seitenmittendreieck besitzt. Die isotrope Richtung ist die Affinitätsrichtung und die (gemeinsame) Schwergerade der Dreiecke D und B die Affinitätsachse (s. Abb.3). Gilt $r + r_u = 0$, so ist der Apollonische Berührungskreis der Umkreis des Dreiecks D und berührt die Kreise κ_i in den Ecken von D (s. Abb.2).

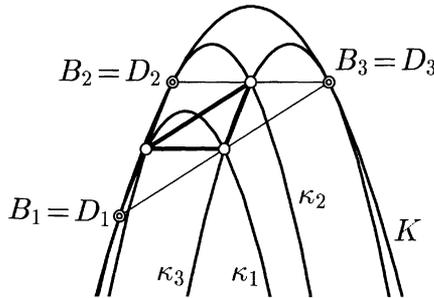


Abb. 2. Der Umkreis des Dreiecks D als Apollonischer Berührungskreis K der Kreise κ_i ($r + r_u = 0$)

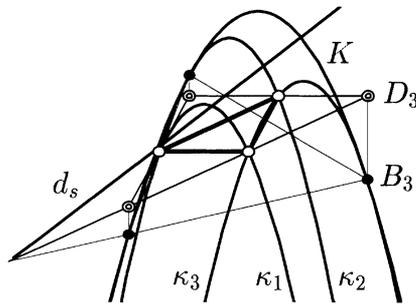


Abb. 3. Der allgemeine Fall: Das Dreieck B der Berührungspunkte der Kreise κ_i ist perspektiv affin zum Dreieck D mit der gemeinsamen Schwergerade d_s der Dreiecke B und D als Affinitätsachse

Bei gegebenem Kreis κ_1 und dem Schnittpunktdreieck S läßt sich über die Schwergerade d_s sofort entscheiden, ob die Situation von Satz 2 oder eine der beiden Situationen von Satz 3 vorliegt, nämlich je nachdem der Schnittpunkt B_1 von κ_1 mit der isotropen Geraden durch D_1 auf d_s liegt oder nicht bzw. mit D_1 zusammenfällt. Gilt $B_1 = D_1$, so ist die *Konstruktion* des Apollonischen Berührkreises K klar. Gilt $B_1 \neq D_1$ und $B_1 \notin d_s$, so läßt sich über d_s das Berührdreieck B und damit K konstruieren.

Bemerkung 1. Theoretisch läßt sich der Fall $r_u + r \neq 0$ auf jenen mit $r + r_u = 0$ zurückführen. Dies gelingt mit der *isotropen Kreis spieg elung* σ [3, S.149f]

$$x = x', \quad y = \frac{1}{2}(r + r_u)x'^2 - y'.$$

Denn dann gilt für den Kreisradius r' der Kreise $\sigma(\kappa_i)$: $r' = (r_u - r)/2$ und für den Kreisradius R' von $\sigma(K)$: $2R' = r'$. Jetzt ist $-r'$ der Umkreisradius von $\sigma(S)$ und R' der des Dreiecks D^* ($\neq \sigma(D)$), wobei $\sigma(S)$ das Seitenmittendreieck von D^* ist. Es gilt mit den Ecken D_i^* $\sigma(B_i) = D_i^*$. Die Abbildung σ^{-1} liefert den gesuchten Apollonischen Berührkreis.

§ 2. Das Apollonische Berührproblem für drei kongruente Kreise, deren Schnittpunkte eine Gerade bestimmen

Bestimmen die Schnittpunkte S_{ij} dreier kongruenter Kreise $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ eine Gerade g , so können wir uns diese o.B.d.A. als x-Achse des Koordinatensystems wählen. Sind alle S_{ij} *voneinander verschieden*, so können wir ihre Koordinaten zu

$$S_{12} = (0, 0), \quad S_{13} = (A, 0), \quad S_{23} = (B, 0), \quad \text{mit } A \neq B, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

annehmen. Damit folgt mit dem Radius r^* ($\in \mathbb{R}$) der Kreise κ_i die Darstellung

$$\begin{aligned} \kappa_1: \quad y &= r^*(x - A)x, & \kappa_2: \quad y &= r^*(x - B)x \\ \kappa_3: \quad y &= r^*(x - A)(x - B) \quad \text{mit } AB(A - B) \neq 0. \end{aligned}$$

Als Darstellung des Apollonischen Berührkreises K ergibt sich

$$K: \quad y = \frac{r^*}{4} \{3x^2 - 2(A + B)x - (A - B)^2\}.$$

Mit den Berührungspunkten $B_i \in K, \kappa_i$

$$\begin{aligned} B_1 &= (A - B, -r^*B(A - B)), & B_2 &= (-(A - B), r^*A(A - B)), \\ B_3 &= (A + B, r^*AB) \end{aligned} \tag{9}$$

folgt

Satz 4. Haben drei kongruente Kreise κ_i drei verschiedene kollineare Schnittpunkte, so existiert genau ein Kreis K , der κ_1 , κ_2 und κ_3 berührt. Die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der Kreise κ_i ist Schwergerade des Dreiecks der Berührungspunkte von K mit den kongruenten Kreisen κ_i .

Zur *Konstruktion* benutzt man zweckmäßig die isotropen Projektionen der Berührungspunkte (9) auf die x -Achse, die vermöge der Schnittpunkte S_{ij} der Kreise κ_i und κ_j linear konstruierbar sind. Die isotropen Geraden durch die Projektionen schneiden dann die gegebenen kongruenten Kreise κ_i in den gesuchten Berührungspunkten mit dem Apollonischen Berührungskreis.

Bemerkung 2. Theoretisch läßt sich unser Fall auf die in Satz 2 beschriebene Situation zurückführen. Denn üben wir eine isotrope Spiegelung σ am Kreis vom Radius $\frac{1}{2}\rho_u$ aus, so ist ρ_u der Umkreisradius des von den Bildpunkten $\sigma(S_{12})$, $\sigma(S_{13})$, $\sigma(S_{23})$ gebildeten Dreiecks. Für den Radius r bzw. R der kongruenten Kreise $\sigma(\kappa_i)$ bzw. des Kreises $\sigma(K)$ gilt damit

$$r = \rho_u - r^* \quad \text{bzw.} \quad R = \rho_u - \frac{3}{4}r^* = \frac{1}{4}(3r + \rho_u).$$

Bei *Wahl* von $\rho_u = 3r^*/4$ liegt also die in Satz 2 beschriebene Situation vor.

Sind nur zwei verschiedene Schnittpunkte der drei kongruenten Kreise κ_i vorhanden, also zwei drei Kreise auch noch konzentrisch, so hat das Apollonische Berührproblem *keine* Lösung.

§ 3. Drei kopunktale konzentrische Kreise

1. Derartige Kreise liegen nach der Klassifikation von H. Sachs [4] in einem *Oskulationsbüschel* von Typ A 10) [4, S. 364]. Natürlich gibt es jetzt keinen Apollonischen Berührungskreis. Benutzen wir das in [3, S. 52ff] beschriebene *Übertragungsprinzip*, welches die Kreise bijektiv auf die Punkte einer längs eines einteiligen Kegels 2. Ordnung N_2^2 aufgeschnitten dreidimensionalen Hyperfläche 2. Ordnung $M_3^2 \subset P_4(\mathbb{R})$ abbildet, so folgt dies mit ($i = 1, 2, 3$)

$$2rx^2 - 2rA_1x - 2y = 0, \quad A_i - A_k \neq 0 \quad \text{für } i \neq k$$

daraus, daß das Gleichungssystem [3, S.54]

$$2rA_i z_1 + 2r z_3 - z_4 - r^2 A_i^2 z_2 = 0$$

die Lösungsgerade $g = s\{1:0:0:0\} + t\{0:0:0:1:2r\}$ besitzt. Diese liegt aber in jener Tangentialhyperebene, welche die M_3^2 nach N_2^2 schneidet. Dieser (triviale) Sonderfall blieb in [3, Satz 4.6] unbeachtet.

2. Wir können jedoch fragen, ob es drei kongruente kopunktale Kreise so gibt, daß jeder genau zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks zu Tangenten hat. Die Lösung ergibt sich durch Dualisierung von Satz 1, d.h. durch die *Polarität* am *Hauptkreis* b_D des Dreiecks D , das für b_D ein Polardreieck ist [7, S.512]. b_D ist zugleich Inkreis des Dreiecks S seiner Seitenmitten. Analytisch ist die Polarität wegen (6) durch

$$x = (\lambda B - A) \{2\lambda u - 1\}, \quad y = -v + (\lambda B - A)u \quad (10)$$

bestimmt, wenn wir die Inzidenzrelation in der Form $y = ux + v$ schreiben. Das polare Bild von S ist das Dreieck $W := \Delta(W_1 W_2 W_3)$ der Winkelhalbierenden des Dreiecks und das Bild der Schwergeraden d_i der (geometrische) Schwerpunkt des Dreiecks S [7, S.535]. Da b_D zugleich Umkreis von W ist, ist S umgekehrt das zu W gehörige Tangendendreieck. Also haben wir

Satz 5. Sei W ein zulässiges Dreieck der isotropen Ebene. Dann gibt es genau drei kopunktale und kongruente Kreise κ_i^* so, daß jeder genau zwei Seiten des gegebenen Dreiecks zu Tangenten hat. Der gemeinsame Punkt der Kreise κ_i^* ist Schwerpunkt des zu W gehörigen Tangendendreiecks S . Der gemeinsame Kreisradius $R(\kappa_i^*)$ ist gleich dem $-3/4$ -fachen des Umkreisradius $R(W)$.

Die letzte Aussage kann z.B. mit (3) und (10) gezeigt werden. Denn danach gilt

$$\kappa_i^*: \quad v = \frac{1}{3} \left\{ \frac{4}{r_u} u^2 - (A + \lambda B)u + B \right\},$$

also gilt nach [3, S.27] $R(\kappa_i^*) = -(3/16)r_u$. Da nach [7, S.556] für die Umkreisradien $R(W) = 1/4 R(S)$ gilt, folgt $R(\kappa_i^*) = -3/4 R(W)$.

§ 4. Schnittpunkteigenschaften kongruenter Kreise eines linearen parabolischen Kreissystems

1. Wir denken uns drei kongruente Kreise $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ eines linearen parabolischen Kreissystems $\mathcal{S}(K)$ fest gewählt. Analog zur Bemerkung 2 (d.h. eventuell nach einer geeigneten isotropen Spiegelung) können wir annehmen, daß ihre Schnittpunkte $S_{ik} = \kappa_i \cap \kappa_k$ ein zulässiges Dreieck $S = \Delta(S_{12}, S_{13}, S_{23})$ bilden. Die Schnittpunkte der Kreise κ_i bestimmen damit in der projektiven Ebene $P_2(\mathbb{R}) \supset I_2$ die Grundpunkte eines nicht ausgearteten Kegelschnittbüschels, das nach der *Klassifikation* von V. Scuric [6, S.50] vom Typ I_8 ist.

Satz 6. In der isotropen Ebene liege ein Kegelschnittbüschel \mathcal{B} vom Typ I_8 vor, und es bezeichne S_{12}, S_{13}, S_{23} die eigentlichen Büschelgrund-

punkte. Ferner sei κ_i jenes Tripel kongruenter Kreise vom Radius r , dessen Kreise κ_i und κ_j genau den Punkt S_{ij} gemeinsam haben. Ist $\beta \in \mathcal{B}$ ein beliebiger, aber vom einzigen Büschelkreis $u(S)$ verschiedener Kegelschnitt, so liegen seine von S_{ik} verschiedenen Schnittpunkte $\beta \cap \kappa_i$ ($i = 1, 2, 3$) auf einem Kreis $\kappa(\beta)$, dessen Radius unabhängig von β ist. Die Kreise dieser so gewonnenen Schar kongruenter Kreise sind genau für $2r + R(u(S)) = 0$ konzentrisch und gehören sonst der durch die Kreise κ_i bestimmten linearen parabolischen Kreisschar an (s. Abb. 4). Genau für $r + R(u(S)) = 0$ sind die Kreise $\kappa(\beta)$ sogar zu den Kreisen κ_i kongruent (s. Abb. 5).

Beweis. (i) Nach dem ersten Abschnitt können wir o.B.d.A. annehmen, daß die Punkte S_{ik} die Koordinaten (1) haben. Damit gilt für die

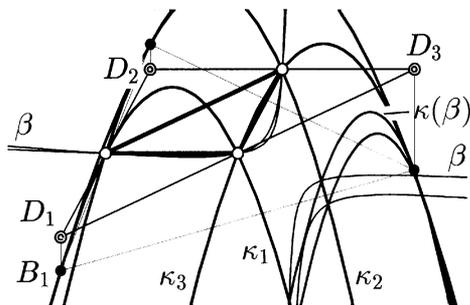


Abb. 4. Allgemeiner Fall: Die kongruenten Kreise $\kappa(\beta)$ als Schnitterzeugnis der Kreise κ_i mit den Kegelschnitten $\beta \neq u(S)$ des Kegelschnittbüschels, erzeugt durch die kongruenten Kreise κ_i . Die Kreise $\kappa_i, \kappa(\beta)$ gehören demselben linearen parabolischen Kreissystem an

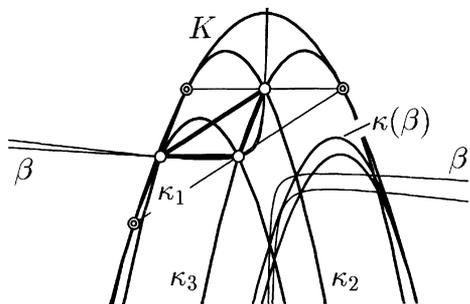


Abb. 5. Alle Kreise $\kappa(\beta)$ sind kongruent zu den Kreisen κ_i und berühren deren Apollonischen Berührungskreis $K(r + r_u = 0)$

Kegelschnitte des durch die Punkte S_{ik} bestimmten Büschels vom Typ I_8

$$\beta(\tau); \quad x(x + (\tau - \lambda)y) - Ax + \lambda(A - \tau B)y = 0. \quad (11)$$

Für $\tau = \lambda$ erhalten wir den *einzigsten Büschelkreis* $u(S)$, nämlich den Umkreis des Dreiecks $S := \Delta(S_{12}, S_{13}, S_{23})$. Damit gilt $R(u(S)) = :r_u = [\lambda(\lambda B - A)]^{-1}$. Die *zerfallenden Kegelschnitte* ergeben sich aus (11) für

$$\begin{aligned} \beta(\tau_1): \quad & (x - \lambda B)y = 0; \quad \tau_1 = \infty \\ \beta(\tau_2): \quad & (x - A)(x - \lambda y) = 0; \quad \tau_2 = 0 \\ \beta(\tau_3): \quad & x(x + (\lambda - \lambda B)B^{-1}y - A) = 0; \quad \tau_3 = A/B. \end{aligned} \quad (12)$$

Die übrigen τ -Werte bestimmen die *speziellen Hyperbeln* des Büschels. Für die folgenden Beweisteile sei $\tau \neq \lambda$ vorausgesetzt.

(ii) Für die Darstellung der Kreise κ_i gilt (3). Damit bestimmen sich die von S_{ik} verschiedenen Schnittpunkte $\beta(\tau) \cap \kappa_i = : (x_{ik}, y_i)$ zu

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1 + \lambda r(A - \tau B)}{r(\lambda - \tau)}, \quad y_1 = \frac{[1 + \lambda r(A - \tau B)](\lambda r_u - \tau r)}{\lambda r(\lambda - \tau)^2 r_u} \\ x_2 &= \frac{\tau + r\lambda^2(A - B)}{r\lambda(\lambda - \tau)}, \quad y_2 = \frac{\tau + r\lambda^2(A - \tau B)}{r\lambda(\lambda - \tau)^2 r_u} (r_u - r) \\ x_3 &= \frac{\lambda(A - \tau B)(r - r_u)}{r(\lambda - \tau)}, \quad y_3 = \frac{\tau r + \lambda^2 r_u^2(A - \tau B)}{\lambda r(\lambda - \tau)^2 r_u^2} (r - r_u). \end{aligned} \quad (13)$$

Für die dadurch bestimmten Kreise $\kappa(\beta) = \kappa^*(r, \tau)$ folgt

$$\kappa(\beta): \quad y = (r^3/r_u^2)x^2 + \alpha x + \gamma \quad (14)$$

Mit

$$\alpha = \frac{r_u + r^2\lambda(A - \tau B)}{(\lambda - \tau)} - \frac{r^2\tau + \lambda + 2r\lambda^2(A - \tau B)}{r_u^2\lambda(\lambda - \tau)} \quad (15)$$

$$\gamma = \frac{r - r_u}{\lambda(\lambda - \tau)^2 r_u^2} [1 + r\lambda(A - \tau B)] [\tau + r\lambda^2(A - \tau B)].$$

(iii) Der Darstellung (14) entnehmen wir die Kongruenzaussagen und damit eine *weitere* geometrische Deutung des Falles $r + r_u = 0$ (Satz 3).

Wegen

$$\alpha = \frac{r^2}{r_u^2} \left[\lambda B(r_u - 2r) + \frac{1}{\lambda} \right] + \frac{(r - r_u)^2}{r_u^3(\lambda - \tau)} (2r + r_u) \quad (16)$$

folgt, daß die Kreise $\kappa(\beta)$ genau für $2r + r_u = 0$ das *Hyperoskulationsbüschel* B7 bestimmen [4, S.340], dem dann auch der Apollonische Berührungskreis K der Kreise $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ angehört. Er ergibt sich als Kreis $\kappa(\beta)$ für $(A - 2\lambda B)\tau + (2A - \lambda B)\lambda = 0$. Genau für $2r + r_u = 0$ ist der Apollonische Berührungskreis K zum Inkreis des Dreiecks D des 1. Abschnitts kongruent und dann konzentrisch.

(iv) Zum Beweis, daß der Apollonische Kreis K der κ_i i.a. ein Berührungskreis vom Kreis $\kappa(\beta)$ ist, berechnen wir die Schnittpunkte von K und $\kappa(\beta)$. Nach (4) und (14) gilt für deren Abszissen

$$\frac{r_u - r}{4r_u^2} (2r + r_u)^2 x^2 + \left[\frac{1}{2\lambda} \{1 - \lambda r(A + \lambda B)\} - \alpha \right] x + \frac{r_u - r}{4\lambda^2 r_u^2} - \gamma = 0. \quad (\text{a})$$

Wir haben

$$\frac{r_u - r}{4\lambda^2 r_u^2} - \gamma = \frac{r_u - r}{4\lambda^2 (\lambda - \tau)^2 r_u^2} [\tau + \lambda + 2\lambda^2 r(A - \tau B)]^2 \quad (\text{b})$$

und nach (15)

$$\frac{1}{2\lambda} \{1 - \lambda r(A + \lambda B)\} - \alpha = \frac{1}{2\lambda (\lambda - \tau) r_u^2} \{C + 2r^2 [\tau + \lambda + 2r\lambda^2 (A - \tau B)]\}$$

mit

$$C := (\lambda - \tau)r_u^2 - \lambda r(\lambda - \tau)\tau r_u^2 (A + \lambda B) - 2\lambda r_u^2 - 2\lambda^2 r^2 r_u (A - \tau B).$$

Wir formen um:

$$C = -[\tau + \lambda + 2\lambda^2 r(A - \tau B)] (r r_u + r_u^2)$$

und erhalten somit

$$\frac{1}{2\lambda} \{1 - \lambda r(A + \lambda B)\} - \alpha = -2 \frac{(r_u - r)(2r + r_u)}{\lambda(\lambda - \tau)4r_u^2} [\tau + \lambda + 2r\lambda^2 (A - \tau B)]. \quad (\text{c})$$

Wegen (a), (b) und (c) berühren sich die in Rede stehenden beiden Kreise, und für die x-Koordinate des Berührungspunktes gilt

$$x_b(\tau, r) = \frac{\tau + \lambda + 2r\lambda^2 (A - \tau B)}{\lambda(\lambda - \tau)(2r + r_u)} \quad \text{mit} \quad 2r + r_u \neq 0. \quad (17)$$

2. Der Fall $r = -r_u$ ist von besonderem Interesse und hängt eng mit den *Tridens-Kurven* 3. Ordnung $t^{(3)}$ zusammen. Man versteht darunter alge-

braische Kurven 3. Ordnung, bei denen der absolute Punkt ein Knoten mit der absoluten Geraden als Tangente ist. Die Kurven $t^{(3)}$ wurden von D. Palman [2] und H. Sachs [5] untersucht.

Wir gehen dazu von vier kongruenten Kreisen $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa$ eines linearen parabolischen Kreissystems \mathcal{S} aus. Hierbei setzen wir voraus, daß der Radius R des Apollonischen Berührungskreis $K(\mathcal{S})$ nicht verschwindet. Die Kreise κ_i denken wir uns so gewählt, daß ihre Schnittpunkte ein (zulässiges) Dreieck S bilden. Bezeichnet r_u den Radius des Umkreises $u(S)$ von S und r den Radius der Kreise κ_i und κ , so gilt nach dem 1. Abschnitt die Abhängigkeit $r_u = 4R - 3r$. Lassen wir κ das Kreissystem \mathcal{S} durchlaufen, so entstehen Schnittpunktkonfigurationen $F(\kappa)$ der Kreise κ, κ , die für $\kappa \neq \kappa_i$ in $P_2(\mathbb{R}) \supset I_2$ neben dem absoluten Punkt F und der Ferngeraden als Tangente in F aus 6 eigentlichen Punkten bestehen. Um Aussagen über die hierdurch bestimmte algebraische Kurve zu machen, über wir eine isotrope Spiegelung σ aus. Wählen wir den Radius ρ des Inversionskreises zu $\rho = r/2$, so wird $F(\kappa)$ „linearisiert“: Die Bilder $\sigma(\kappa_i), \sigma(\kappa)$ sind Tangenten des Bildkreises $\sigma(K(\mathcal{S}))$ mit dem Radius $R_\sigma = r - R$. Nach [8] bestimmen die Schnittpunkte des Tangentenvierseits $\sigma(\kappa_1), \sigma(\kappa_2), \sigma(\kappa_3), \sigma(\kappa)$ von $\sigma(K(\mathcal{S}))$ entweder eine Tridenskurve 3. Ordnung $t^{(3)}$ oder zwei der Schnittpunkte sind parallel und die übrigen liegen auf einem Kreis.

Die Tridens-Kurve ist also in eine isotrope Gerade und einen Kreis Σ zerfallen. Wie man (8) entnimmt, gilt für seinen Radius $R_\Sigma = 2R_\sigma$. Bekanntlich ist $\sigma^{-1}(t^{(3)})$ i.a. wieder eine Tridens-Kurve 3. Ordnung [2, S.40], d.h.: *die Schnittpunkte von vier kongruenten Kreisen eines linearen parabolischen Kreissystems liegen i.a. auf einer Tridens-Kurve 3. Ordnung.*

Nach [2,8] ist $\sigma^{-1}(t^{(3)})$ genau für $\rho = R_\sigma$ eine *spezielle Hyperbel*, was mit $r + r_u = 0$ äquivalent ist. Die Schnittpunkte $F(\kappa)$ liegen also auf einer speziellen Hyperbel des durch S und den absoluten Punkt F als Grundpunkte bestimmten Kegelschnittbüschels \mathcal{B} . Ebenso ist $\sigma^{-1}(\Sigma)$ genau dann eine Gerade, wenn $r = R_\Sigma$, also $r + r_u = 0$ gilt. Die Schnittpunkte $F(\kappa)$ liegen dann auf einer isotropen Geraden durch eine Ecke von S und der Verbindungsgeraden der anderen beiden Ecken. Wir haben also einen zerfallenden Kegelschnitt des Büschels \mathcal{B} .

Satz 7. Seien κ_i vier (verschiedene) kongruente Kreise mit gemeinsamem Apollonischem Berührungskreis von nicht verschwindendem Radius R so, daß die Schnittpunkte von $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ein Dreieck S bilden. Dann liegen die Schnittpunkte der vier Kreise κ_i genau dann auf einem Kegelschnitt, wenn für den Radius r der Kreise κ_i gilt: $r = 2R$. Dieser Kegelschnitt gehört dann dem durch S und den absoluten Punkt F bestimmten Büschel \mathcal{B} an.

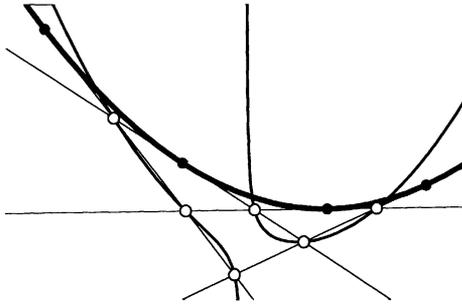


Abb. 6. Die Tridens-Kurve $t^{(3)}$, bestimmt durch die Schnittpunkte des Tangentenvierseits $\sigma(\kappa_1), \sigma(\kappa_2), \sigma(\kappa_3), \sigma(\kappa)$ des Kreises $\sigma(K(\mathcal{S}))$

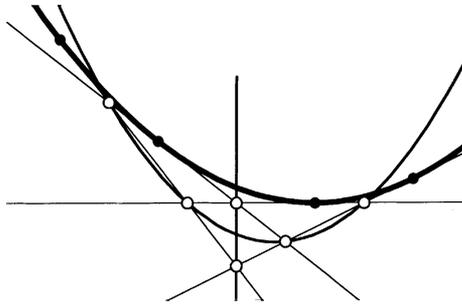


Abb. 7. Die Tridens-Kurve $t^{(3)}$ ist in einen Kreis Σ und eine Diagonale des Tangentenvierseits zerfallen

3. Nach dem 1. Teil dieses Abschnittes läßt sich für $r + r_u = 0$ auf diese Art *jeder* vom Kreis $u(S)$ verschiedene Kegelschnitt $\beta \in \mathcal{B}$ erzeugen. Denn danach existiert zu den kongruenten Kreisen $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathcal{S}$ ein dazu kongruenter Kreis $\kappa_4 := \kappa(\beta)$ aus \mathcal{S} (s. (14)) so, daß die Schnittpunkte der Kreise $\kappa_1, \dots, \kappa_4$ auf β liegen und β bestimmen.

Da wir für $\kappa_4 = \kappa_i (i \in \{1, 2, 3\})$ trivialerweise den einzigen Büschelkreis $u(S)$ von \mathcal{B} erhalten, haben wir folgende *geometrische Erzeugung* des Kegelschnittbüschels vom Typ I_8 gewonnen.

Satz 8. Sei \mathcal{B} ein Kegelschnittbüschel vom Typ I_8 mit dem eigentlichen Grunddreieck $S = \Delta(S_{12}, S_{13}, S_{23})$. Bezeichne r_u den Radius des Umkreises von S und \mathcal{S} das lineare parabolische Kreissystem, das durch jene drei kongruenten Kreise κ_i vom Radius $-r_u$ bestimmt ist, welche je durch

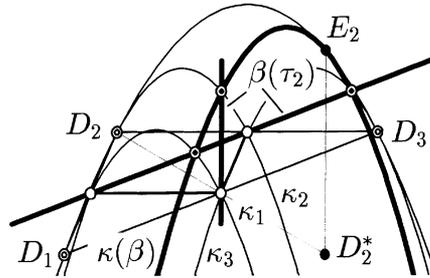


Abb. 8. Ein zerfallender Kegelschnitt $\beta(\tau_i)$ des Büschels \mathcal{B} , erzeugt über die Schnittpunkte der kongruenten Kreise $\kappa(\beta)$ und $\kappa_j(r + r_u = 0)$

genau zwei Ecken von S gehen. Dann bestimmen die Schnittpunkte der kongruenten Kreise κ_i und κ mit $\kappa \in \mathcal{S}$ alle Kegelschnitte von \mathcal{B} , wenn der zu κ_i kongruente Kreis κ das Kreissystem \mathcal{S} durchläuft.

Die Berührungspunkte (17) lassen sich für $\tau = \tau_1, \tau_2, \tau_3$ und $r + r_u = 0$ linear konstruieren. Schreiben wir für sie

$$E_i := (x_b(\tau_i - r_u), y_b(\tau_i - r_u)),$$

so folgt nach (17) und (4)

$$E_1 = (3\lambda B - A, -B), \quad E_2 = (3A - \lambda B, (4A - \lambda B)\lambda^{-1}),$$

$$E_3 = (-A - \lambda B, -\lambda B r_u(3A + \lambda B)).$$

Spiegeln wir andererseits die Punkte D_i an $S_{j\neq i}$ ($i \neq j \neq k \neq i; i, j, k = 1, 2, 3$), so haben die gespiegelten Punkte D_i^* die Koordinaten

$$D_1^* = (3\lambda B - A, 3B), \quad D_2^* = (3A - \lambda B, -B), \quad D_3^* = (-A - \lambda B, -B).$$

Die Dreiecke $E := \Delta(E_1, E_2, E_3)$ und $D^* := \Delta(D_1^*, D_2^*, D_3^*)$ sind also perspektiv affin, und E ist das *Höhendreieck* von D^* , wie die Darstellungen

$$D_2^* \vee D_3^* : y = -B; \quad D_1^* \vee D_3^* : \lambda y = x + A; \quad D_1^* \vee D_2^* : y = \lambda B r_u(x - 2A)$$

zeigen (s. Abb. 8).

Danksagung

Besonderer Dank meinem Freund Dr. W. Schürer für die Anfertigung der Figuren.

Literatur

- [1] Lang, J.: Zur isotropen Dreiecksgeometrie und zum Apollonischen Berührproblem in der isotropen Ebene. Ber. d. Math. Stat. Sek., Forschungszentrum Graz, Ber. **241**, 1–11 (1983)
- [2] Palman, D.: Über zirkuläre Kurven 3. Ordnung der isotropen Ebene, Rad. JAZU [444] **8**, 37–46 (1989)
- [3] Sachs, H.: Ebene isotrope Geometrie. Vieweg, Braunschweig und Wiesbaden, 1987
- [4] Sachs, H.: Oskulierende und hyperoskulierende Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene, Sb. Österr. Ak. Wiss. Math.-Nat. Kl. II **196**, 337–375 (1987)
- [5] Sachs, H.: Vollständige zirkuläre Kurven n-ter Ordnung der isotropen Ebene, Studia Sci. Math. Hungarica **24**, 377–383, (1989)
- [6] Scuric, V.: Zur Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene, Rad. JAZU [450] **9**, 41–51, (1990)
- [7] Strubecker, K.: Zwei Anwendungen der isotropen Dreiecksgeometrie auf ebene Ausgleichsprobleme. Sb. Österr. Ak. Wiss. Math.-Nat. Kl. II **192**, 497–559, (1983)
- [8] Tölke, J.: Zur Geometrie der Tridens-Kurven der isotropen Ebene. Erscheint in Studia Sci. Math. Hungarica

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Jürgen Tölke, Fachbereich 6–Mathematik, Universität Gesamthochschule Siegen, D-57068 Siegen, Deutschland.