

Operatormethoden für q -Identitäten IV: Eine Klasse von q -Gould-Polynomen

Von

J. Cigler

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 10. Oktober 1996
durch das w. M. Johann Cigler)

Die klassischen Gould-Polynome $A_n(x, r) := \frac{x}{x+rn} \binom{x+rn}{n}$, $r \geq 0$ ganz, sind durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert (vgl [5]):

- 1) $A_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad $\deg A_n = n$
- 2) $A_n(0) = \delta_{n0}$
- 3) $E^{-r} \Delta A_n(x) = A_{n-1}(x)$.

Dabei ist $E^a f(x) = f(x+a)$ der Verschiebungsoperator und $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$ der Differenzenoperator.

Wir wollen nun ein q -Analogon $G_n(x, r)$ der Gould-Polynome definieren, das dieselben formalen Eigenschaften aufweist. Wir verwenden dazu die Bezeichnungen von Teil I ([1]).

Sei $\mathbb{F} = \mathbb{R}(q)$ der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten q über \mathbb{R} und $\mathbb{F}[X]$ der Ring der Polynome über \mathbb{F} . Sei

$$Z := \{[x] = \frac{q^x - 1}{q - 1} : x \in \mathbb{Z}\}.$$

Wir ordnen jedem Polynom $p(X) = \sum a_k X^k$, $a_k \in \mathbb{F}$, die Funktion $p: Z \rightarrow \mathbb{F}$ zu, die durch

$$p([x]) = \sum a_k q^{kx}$$

definiert ist. Wir nennen $p([x])$ ein q -Polynom. Es erweist sich als zweckmäßig, statt der Basis $\{q^{kx}\}_{k \geq 0}$ die Basis $\left\{ q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} \right\}_{k \geq 0}$ zu wählen.

Wir schreiben dann ein q -Polynom in der „Normalform“

$$p([x]) = \sum_{k=0}^n b_k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}.$$

Sei $B(Z)$ die Menge aller Funktionen $f: Z \rightarrow \mathbb{F}$.

Wir definieren auf $B(Z)$ den Verschiebungoperator E^a , $a \in \mathbb{Z}$, durch

$$(E^a f)([x]) = f([x + a])$$

und den Differenzenoperator Δ durch

$$(\Delta f)([x]) = \frac{f([x + 1]) - f([x])}{q^x}.$$

Dann gilt $\Delta E = qE\Delta$, weil $Eq^x = q^{x+1}$ und

$$(\Delta E)f[x] = \Delta f([x + 1]) = \frac{f([x + 2]) - f([x + 1])}{q^x}$$

und

$$(E\Delta)f[x] = E \frac{f([x + 1]) - f([x])}{q^x} = \frac{f([x + 2]) - f([x + 1])}{q^{x+1}}$$

gilt.

Es ist dann (vgl [1] (40))

$$q^{\binom{n}{2}} \Delta^n = \frac{1}{q^{n \times}} \prod_{k=0}^n (E - q^k) = \frac{1}{q^{n \times}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} E^{n-k}.$$

DEFINITION. Die Folge $G_n([x], r)$ von q -Polynomen heißt Folge der q -Gould-Polynome zum Parameter $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$, wenn

- 1) $\deg G_n([x], r) = n$
- 2) $G_n([0], r) = \delta_{n0}$
- 3) $(E^{-r} \Delta) G_n([x], r) = G_{n-1}([x], r)$

gilt.

Da $\Delta f[x] = 0$ nur für die konstanten Funktionen gilt, ist die Folge G_n , falls sie existiert, eindeutig festgelegt.

Nun ist klar, daß die Folge $G_n([x], 0) = q^{\binom{x}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix}$ alle Eigenschaften für

$r = 0$ erfüllt, weil $\begin{bmatrix} x + 1 \\ n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = q^{x-n+1} \begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix}$ gilt.

Die q -Gould-Polynome zum Parameter $r = 0$ sind also im wesentlichen die q -Binomialkoeffizienten. Der Faktor $q^{\binom{x}{2}}$ garantiert die Eigenschaft 3).

Für $r = 1$ lassen sich die Gould-Polynome $G_n([x], 1)$ ebenfalls durch eine explizite Formel darstellen:

$$G_n([x], 1) = \begin{bmatrix} x + n - 1 \\ n \end{bmatrix}.$$

Denn 1) und 2) sind trivialerweise erfüllt und 3) folgt aus

$$\begin{aligned} E^{-1}\Delta \begin{bmatrix} x + n - 1 \\ n \end{bmatrix} &= E^{-1} \frac{1}{q^x} \left(\begin{bmatrix} x + n \\ n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x + n - 1 \\ n \end{bmatrix} \right) = \\ &= E^{-1} \begin{bmatrix} x + n - 1 \\ n - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + n - 2 \\ n - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Im klassischen Fall $q = 1$ gilt $A_n(x, r) = \frac{x}{x + nr} \binom{nr + x}{n}$.

Diese Formel hat kein offensichtliches Analogon für beliebige q . Wir müssen daher anders vorgehen.

Wir suchen q -Polynome

$$G_n([x], r) = \sum_{k=0}^n C_{nk}^{(r)} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } C_{nn}^{(r)} \neq 0, C_{n0}^{(r)} = \delta_{n0} \text{ und}$$

$$(E^{-k}\Delta) G_n([x], r) = G_{n-1}([x], r).$$

Diese Gleichung bedeutet

$$(*) \quad E^r \sum C_{n-1,k}^{(r)} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = \Delta \sum C_{nk}^{(r)} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}.$$

Nun gilt die Vandermonde'sche Formel

$$q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x + y \\ n \end{bmatrix} = \sum_k q^{ky} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} y \\ n - k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}.$$

Denn setzt man $q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x + y \\ n \end{bmatrix} = \sum a_{nk} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}$, so ist

$$\begin{aligned} a_{nk} &= L \Delta^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x + y \\ n \end{bmatrix} = L \Delta^k E^y q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} \\ &= L q^{ky} E^y \Delta^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = q^{ky} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} y \\ n - k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $Lp[x] = p([0])$. Wendet man die Vandermonde'sche Formel auf (*) an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_k C_{n,k+1}^{(r)} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} &= \sum_r C_{n-1,l}^{(r)} q^{\binom{l}{2}} \begin{bmatrix} x+r \\ l \end{bmatrix} \\ &= \sum_l C_{n-1,l}^{(r)} \sum_k \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ l-k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} q^{\binom{l-k}{2}} q^{kr} \\ &= \sum_k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} \sum_k \begin{bmatrix} r \\ j \end{bmatrix} q^{\binom{j}{2}} q^{kr} C_{n-1,k+j}^{(r)}. \end{aligned}$$

Da die $\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}$ linear unabhängig sind, liefert ein Koeffizientenvergleich die Rekursion

$$C_{n,k+1}^{(r)} = q^{kr} \sum_j \begin{bmatrix} r \\ j \end{bmatrix} q^{\binom{j}{2}} C_{n-1,k+j}^{(r)}. \tag{1}$$

Zusammen mit $C_{00}^{(r)} = 1$, $C_{n0}^{(1)} = \delta_{n0}$, $C_{nk}^{(r)} = 0$ für $k > n$ ist also die Existenz und Eindeutigkeit der q -Gould-Polynome $G_n([x], r)$ gleichbedeutend mit der Existenz und Eindeutigkeit der $C_{nk}^{(r)}$ mit den obigen Nebenbedingungen. Diese ist aber evident.

Es ergibt sich

$$C = (C_{nk}^{(r)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & [r] & q^r & 0 & \dots \\ 0 & [r]^2 + \begin{bmatrix} r \\ 2 \end{bmatrix} q^{r+1} & q^r [2r] & q^{3r} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} G_0([x], r) &= 1 \\ G_1([x], r) &= [x] \\ G_2([x], r) &= [r] \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} + q^{r+1} \begin{bmatrix} x \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{[x]}{[2]} ([r] + [r+x] - 1), \dots \end{aligned}$$

Wir können aber auch umgekehrt die q -Polynome $q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix}$ durch die $G_n([x], r)$ ausdrücken:

$$q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = \sum a_{nk} G_k([x], r).$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 a_{nk} &= L(E^{-r}\Delta)^k q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = LE^{-kr} q^{-r\binom{n}{2}} \Delta^k q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} \\
 &= q^{-r\binom{n}{2}} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} -kr \\ n-k \end{bmatrix}, \text{ dh.} \\
 q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} &= \sum_k q^{-r\binom{n}{2}} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} -kr \\ n-k \end{bmatrix} G_k([x], r). \tag{2}
 \end{aligned}$$

Speziell ist z.B.

$$C^{-1} = \left(q^{-r\binom{n}{2} + \binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} -kr \\ n-k \end{bmatrix} \right). \tag{3}$$

Mit derselben Methode ergibt sich, daß die $C_{nk}^{(r)}$ gegeben sind durch

$$C_{nk}^{(r)} = G_{n-k}([rk], r) q^{r\binom{n}{2}}. \tag{4}$$

Außerdem ergibt sich genauso die folgende Formel:

$$G_n([x+t], r) = \sum_k q^{kt} G_{n-k}([t], r) G_k([x], r). \tag{5}$$

Das ist das q -Analogon der Binomialeigenschaft für die klassischen Gould-Polynome.

Analog zeigt man

$$q^{nx} = \sum_k (q^n - 1) \cdots (q^{n-k+1} - 1) q^{-r\binom{n}{2} + r\binom{n-k}{2}} G_k([x], r) \tag{6}$$

In der Praxis treten q -Analoga von Gould-Zahlen vor allem beim Abzählen von Gitterwegen auf. Eine ausführliche Darstellung findet sich in [3] und [4]. Die hier betrachteten q -Gould-Polynome sind im wesentlichen identisch mit den $g'_n(r-1, t, q)$ von [4].

Genauer gilt folgendes: Sei $x > 0$. Dann ist $G_n([x], r)$ das Gewicht aller Wege von $(0, 0)$ nach $(m+x, x)$, bei welchen $(r-1)n+x$ Aufstiege $(1, 1)$ und n „Abstiege“ $(1, 1-r)$ auftreten und die niemals auf die x -Achse zurückkehren. Codiert man einen solchen Weg durch eine Folge $a = a_1 a_2 \cdots a_{m+x}$ mit $a_i \in \{0, 1\}$ wobei 0 einem Aufstieg und 1 einem Abstieg entspricht, so ist das Gewicht gegeben durch $q^{w(a)}$ mit $w(a) = A - (r-1)B - rC$, wobei A die Anzahl der Paare $a_i a_j, i < j$, mit $a_i = 0, a_j = 1$ ist, B die Anzahl der Paare $a_i a_j, i < j$, mit $a_i = a_j = 1$ und $C = n$ die Anzahl der $a_i = 1$ bedeutet.

Mit dieser Interpretation lassen sich alle Formeln auch rein kombinatorisch beweisen.

Für $r=2$ ist $C_n := G_n([1]) = G_{n-1}([2])$ ein q -Analogon der Catalanzahlen. Aus (5) ergibt sich

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= G_n([2]) = G_n([1+1]) \\ &= \sum_{k+l=n} q^k G_k([1]) G_l([1]) = \sum_{k+l=n} q^k C_k C_l. \end{aligned}$$

Somit ist C_n mit den q -Catalanzahlen \tilde{C}_n von [2] identisch.

Literatur

- [1] Cigler, J.: Operatormethoden für q -Identitäten I. Mh. Math. **88**, 87–105, (1979).
- [2] Furlinger, J., Hofbauer, J.: q -Catalan Numbers, J. Comb. Th. A **40**, 248–264, (1985).
- [3] Krattenthaler, C.: Counting Lattice Paths with a Linear Boundary I. ÖAW Sitzungsber. **198**, 87–107, (1989).
- [4] Krattenthaler, C.: Counting Lattice Paths with a Linear Boundary II. ÖAW Sitzungsber. **198**, 171–199, (1988).
- [5] Rota, G. C., Kahaner, D., Odlyzko, A.: Finite Operator Calculus. J. Math. Anal. Appl. **42**, 685–760, (1973).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Johann Cigler, Institut für Mathematik, Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien.