Sitzungsber Abt. II (1999) 208: 89–95

Zwei Anwendungen der Theorie der guten Gitterpunkte

Von

E. Hlawka

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 25. März 1999 durch das w. M. Edmund Hlawka)

Einleitung

In der Arbeit „Gleichverteilung und die willkürlichen Funktionen von Poincaré“[1] haben wir die Folge

$$\omega_N(t) = (a_k t + b_k) \quad k = 1, \cdots, N, \tag{1}$$

behandelt, wobei die Folge (a_k, b_k) zu einer Dichte Φ mit Diskrepanz $\tilde{D}_N$ gleichverteilt war.
Es wurden damals endliche Folgen $\beta_1, \ldots, \beta_L$ positiver Zahlen mit $\beta_1 = 1$ eingeführt und die zugehörigen L Folgen

$$\omega_N(\beta_1 t), \ldots, \omega_N(\beta_L t). \tag{2}$$

Die mehrdimensionale Folge

$$\omega_N^L(t) = (\omega_N(\beta_1 t), \ldots, \omega_N(\beta_L t)) \tag{3}$$

nennen wir in diesem Zusammenhang Oberfolge. Die zugehörigen Weylschen Summen ($h_1, \ldots, h_L$ ganze Zahlen, $e(\alpha) = e^{2\pi i \alpha}$)

$$W(N, h, \beta, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{L} e\left(\sum_{j=1}^{N} h_j (a_k \beta_j t + b_k) \right) \tag{4}$$

[1] Math. Slovaca **48**, 457–506 (1998).

können wir auch so schreiben

$$W = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e\left(a_k\left(\sum_{j=1}^{L} h_j\beta_j\right)t + b_k\right) \tag{5}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e(a_k\langle h\beta\rangle t + b_k). \tag{6}$$

Dabei ist $\langle h\beta\rangle = h_1\beta_1 + \cdots + h_L\beta_L$.

Nun ist ja die Folge (a_k, b_k) zur Dichte Φ gleichverteilt. Da $\tilde{D}_N$ ihre Diskrepanz ist, so gilt für W

$$W(N, h, \beta, t) = J + \vartheta\tilde{D}_N \sum_{j=1}^{L} |h_j|^{2L}, \tag{7}$$

wo ϑ eine Konstante mit $|\vartheta| \leq 1$ ist und

$$J = \int e(\langle h\beta\rangle \ at \ + b)\Phi(a, b)dadb \tag{8}$$

ein Integral, welches wir in der bereits erwähnten Arbeit schon benutzt hatten. Es sind nun die $\beta_1, \ldots, \beta_L$ geeignet zu wählen. Wir hatten Zahlen B gewählt, die gewisse spezielle Eigenschaften vom Typus μ hatten. Wir wollen nun die Frage allgemein stellen: Wie sind die $\beta_1, \ldots, \beta_L$ zu wählen,[2] um bei einem Vorgang, zum Beispiel einem in Drehung befindlichen Roulett, festzustellen, ob in den L Zeilen $\beta_1 t, \ldots, \beta_L t$ die Oberfolge

$$\omega_N^L = (\omega_N(\beta_1 t), \ldots, \omega_N(\beta_L t)) \tag{9}$$

gleichverteilt zur Dichte 1 mit kleiner Diskrepanz ist. Wir wollen dies nicht nur für ein spezielles t_0, sondern auch für alle genügend großen t wissen.

Wie schon oben gesagt, haben wir damals Zahlen von Typus μ gewählt. Wir wollen nun zeigen, daß zum Beispiel gute Gitterpunkte zu einem Modul p (p Primzahl) ebenfalls gute Dienste leisten können.

Bevor wir auf diese besonderen Gitterpunkte näher eingehen, möchte ich darauf hinweisen, daß ähnliche Fragestellungen in der Regelungs- und Steuerungstheorie auch von großer Bedeutung sind, wie ich aus einer Vorlesung von Frau Professor Troch (TU Wien) entnehme. Ich verweise dabei auf ihre Arbeiten

[2]Schon Physikern ist es aufgefallen, daß es besser ist, voneinander unabhängige Beobachtungen in der Zeit zu machen als regelmäßige.

[1] Bemerkungen zur n-Beobachtbarkeit und n-Steuerbarkeit. ZAMM **51**, 255–264 (1971).
[2] Über die Bedeutung von Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeitsindex. ZAMM **51**, 265–269 (1971).
[3] Über die Lösungen linearer autonomer Differentialgleichungssysteme als Tschebyscheffsysteme. ZAMM **55**, 193–194 (1972).

Selbstverständlich sind hier andere Methoden als die der Gleichverteilung anzuwenden, aber es wäre das Ziel, einen Satz aufzustellen, der dies alles als Spezialfall enthält. Darüber habe ich auch mit Herrn Professor Herfort (TU Wien) schon diskutiert, dem ich für das Gespräch herzlich danke. Jetzt soll aber die Anwendung der guten Gitterpunkte erläutert werden.

1

Ein viel schärferes Resultat als in „Gleichverteilung und die willkürlichen Funktionen von Poincaré", §5 (18) erhalten wir mit Hilfe der sogenannten Gitterpunkte $g = (g_1, \ldots, g_L)$ modulo p, wobei p eine Primzahl ist. Ein solcher Gitterpunkt g ist ein guter Gitterpunkt modulo p, wenn $g_1, \ldots, g_L$ ganze Zahlen sind, und eine Konstante $K > 0$ existiert, sodaß für jeden Gitterpunkt $h = (h_0, \ldots, h_L)$, wo wieder $h_1, \ldots, h_L$ ganze Zahlen sind, $h \neq 0$ folgendes gilt: Ist

$$h_1 g_1 + \cdots + h_L g_L \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p), \tag{10}$$

so gibt es eine ganze Zahl h_0 mit

$$h_0 p + h_1 g_1 + \cdots + h_L g_L = 0, \tag{11}$$

und es ist

$$\mathrm{R}(h) \geq \frac{p}{(K \log p)^L}. \tag{12}$$

Dabei besitzt $\mathrm{R}(h)$ die übliche Bedeutung

$$\mathrm{R}(h) = \prod_{j=0}^{L} \mathrm{Max}(1, |h_j|). \tag{13}$$

Weiter sei

$$\left\langle h \frac{g}{p} \right\rangle = h_0 + h_1 \frac{g_1}{p} + \cdots + h_L \frac{g_L}{p}. \tag{14}$$

Es ist also

$$\left\langle h\frac{g}{p}\right\rangle = \frac{1}{p}\langle hg\rangle, \tag{15}$$

wo

$$\langle hg\rangle = h_0 p + h_1 g_1 + \cdots + h_L g_L \tag{16}$$

eine ganze Zahl ist.
Es ist also

$$\left|\left\langle h\frac{g}{p}\right\rangle\right| \geq \frac{1}{p} \quad \text{oder} \quad \left|\left\langle h\frac{g}{p}\right\rangle\right| = 0.$$

Im letzten Fall gilt (12), sonst gilt

$$R(h) \geq 1. \tag{17}$$

Im Fall (11) wurde in der Arbeit „Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale", Mh. Math. **66**, 140–151 (1962), bes. S. 147 Formel (13) gezeigt, daß $(s = L + 1)$

$$\sum_{\|h\|\leq M}^{*} \frac{1}{R(h)} \leq \frac{(30K\ \log\ p)^s}{p}, \tag{18}$$

wobei

$$\|h\| = \mathrm{Max}(|h_0|, |h_1|, \ldots, |h_L|)$$

und sich die Summe über alle Gitterpunkte h mit der Bedingung (11) erstreckt.
In der oben zitierten Arbeit wurde gezeigt, daß es immer gute Gitterpunkte modulo p mit passendem K gibt, *z. B.* $K = 80$. Man kann sie auch konstruieren und es gibt jedenfalls bis $L = 4$ oder mehr Tabellen.
Wir wenden nun die Formeln in „Gleichverteilung und die willkürlichen Funktionen von Poincaré", §5 mit $N = p$ an

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = \frac{g_1}{p}, \ldots, \beta_s = \frac{g_L}{p}. \tag{19}$$

Es ist jetzt

$$\langle h\beta\rangle = \frac{1}{p}\langle hg\rangle. \tag{20}$$

Beim Integral

$$J = \int_E e(\langle h\beta\rangle(at + b))\Phi(a, b)dadb \tag{21}$$

haben wir jetzt zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall:

$$\langle hg\rangle \neq 0, \tag{22}$$

dann ist nach der damaligen Rechnung

$$|J| \leq \frac{p}{t|\langle hg\rangle|} C_1, \tag{23}$$

wo

$$C_1 = \mathrm{Max}\left(|\Phi|, \left|\frac{\partial\Phi}{\partial a}\right|\right) \tag{24}$$

ist. Im zweiten Fall,

$$\langle hg\rangle = 0, \tag{13'}$$

ist aber jetzt

$$J = 1. \tag{14'}$$

Wir erhalten also für die Diskrepanz D_N der Oberfolge, die wir damals betrachtet haben

$$D_p \leq C\left(\frac{1}{M} + \frac{p}{t}\hat{\sum}\frac{1}{\mathrm{R}(h)|\langle hg\rangle|} + \sum{}^{*}\mathrm{R}(h)^{-1} + \tilde{D}_p\left(\sum \mathrm{R}(h)^{-1}\|h\|^{2s}\right)\right), \tag{25}$$

wo sich die Summe $\hat{\sum}$ über alle $\|h\| \leq M$ mit $\langle hg\rangle \neq 0$ erstreckt. Sie ist also nach (17)

$$\leq \hat{\sum}\frac{1}{\mathrm{R}(h)} \leq (\lg M)^s. \tag{26}$$

Die Summe $\sum^*$ haben wir bereits in (18) eingeführt.
Wir erhalten also insgesamt

$$D_p \leq C\left(\frac{1}{M} + \frac{p}{t}(\lg M)^s + \frac{(30K\lg p)^s}{p} + \tilde{D}_p(\Phi, \tilde{\omega}_p)(M^{2s})\right). \tag{27}$$

Die Primzahl p kann noch frei gewählt werden. Wir wählen jetzt p so, daß $p^2 \sim t$, also $p \sim \sqrt{t}$ ist. Wir nehmen zu diesem Zweck p als die $[\sqrt{t}] + 1$-te Primzahl, wir wollen sie $p(\sqrt{t})$ nennen. Es ist für großes t bekanntlich

$$p(\sqrt{t}) \sim \sqrt{t}\lg\sqrt{t} = \frac{1}{2}\sqrt{t}\lg t.$$

Es wird dann

$$D_N \le C\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{\sqrt{t}}\left((\lg M)^2+\frac{(30\,K\lg p(\sqrt{t}))^s}{p}\right)\right)+\tilde{D}_N(\Phi,\tilde{\omega}_p)M^{2s}t.$$

Wählen wir z.B. $M=\sqrt{t}$, so erhalten wir

$$D_N \le C\left(\frac{1}{\sqrt{t}}(\lg K+\lg t)^s+\tilde{D}_N(\Phi,\tilde{\omega}_p)t^{L+1}\right).$$

Zu den Zeiten (t und N groß)

$$t,\frac{g_1}{p}t,\dots,\frac{g_L}{p}t$$

ist die Folge ω_p^L fast gleichverteilt.

§ 2.

Wir benützen die Bezeichnungen von §1 und die Bezeichnungen aus der Arbeit „Mathematische Modelle der kinetischen Gastheorie“, Selecta Edmund Hlawka, Springer, 1989, S. 361–375, insbesondere §3 und „Kinetische Gastheorie IV“ (in diesem Band, S. 0–0).

Wir betrachten die Oberfolge

$$\left(v_k t+u_k, v_k g_1\frac{t}{p}+u_k,\dots,v_k g_s\frac{t}{p}+u_k\right)$$

für $k=1,\dots,p$ und die Folge wird mit ω_p^s bezeichnet. Die zugehörige Weylsche Summe ist gleich

$$\begin{aligned}W_p=W(p,h)&=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}e\left(\sum_{j=1}^{s}h_j(v_k g_j t+u_k)\right)\\&=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}e\left(\left\langle\frac{hg}{p}\right\rangle(v_k t+u_k)\right).\end{aligned}$$

Die Diskrepanz der Oberfolge D_p^s bezeichnen wir mit $D_p(t)$. Es ist

$$D_p(t)\le C\left(\frac{1}{M}+\sum_{\|h\|\le M}\frac{1}{\mathrm{R}(h)}|W_p|\right).$$

Es ist

$$\left|\frac{1}{T}\int_K^{K+T}D_p(t)dt\right|\le C\left(\frac{1}{M}+\sum_{\|h\|\le M}\frac{1}{\mathrm{R}(h)}\frac{1}{T}\int_K^{K+T}|W_p(t)|\right)dt.$$

Es ist nun (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

$$\sum_{\|h\|\le M} \frac{1}{R(h)} \frac{1}{T} \int_K^{K+T} |W_p(t)| dt \le \frac{1}{T} \sqrt{\sum_h \frac{1}{R(h)}} \sqrt{\frac{1}{R(h)} \int_K^{K+T} |W_p(t)|^2 dt}.$$

Es ist dann

$$|W_p|^2 = \sum_{k,j} e\left(\left\langle \frac{hg}{p} \right\rangle ((v_k - v_j)t + (u_k - u_j))\right).$$

Wenn $k = j$, so ist der Term der obigen Doppelsumme

$$\left\langle \frac{hg}{p} \right\rangle ((v_k - v_j)t + (u_k - u_j))$$

gleich Null.
Ist weiter $v_k \neq v_j$ und $\langle gh \rangle \neq 0$, so ist das Integral über t von K bis $K + T$ über diesen Term dem Betrage nach

$$\frac{p}{\langle gh \rangle} \frac{1}{|v_k - v_j|} \log T.$$

Nun haben wir gezeigt, daß

$$\sum_{k,j} \frac{1}{\langle gh \rangle} \frac{1}{\langle v_k - v_j \rangle} \le \left(\frac{\tau(\Omega)}{C} + T \check{D}_N \right) \frac{\log T}{T}.$$

Ist nun aber $v_k \neq v_j$ und $\langle gh \rangle = 0$, so erhalten wir wieder 1. Wir erhalten also insgesamt

$$D_p \le (\log M)^s \left[\frac{1}{p} + \frac{p \log T}{T} \left(\frac{\tau(\Omega)}{C} + \check{D}_N \right) + \frac{(30K \log p)^s}{p} \right]^{1/2}.$$

Wir wählen für diese Rechnung $M = p$ und erhalten

$$D_p \le \left[(30\, K \log p)^s \left(\frac{1}{p} + \frac{p \log T}{T} \left(\frac{\tau(\Omega)}{C} + \check{D}_N \right) \right) \right]^{1/2}.$$

Und wir wählen jetzt für p die Primzahl $p(\sqrt{t})$ und erhalten

$$D_p \le \frac{1}{T^{1/4}} (30\, K \log p(\sqrt{t}))^s + \log T \left(\frac{\tau(\Omega)}{C} + \check{D}_p \right)^{1/2}.$$

Dieses Resultat kann für die Diskussion der Anwendung in der Arbeit „Kinetische Gastheorie IV“ verwendet werden.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. E. Hlawka, Institut für Analysis und Technische Mathematik der Tu Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10, A-1040 Wien.