Sitzungsber. Abt. II (2002) 211: 21–38

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften



# Gleichungen $a{u_h}^k + b{u_n}^l + c{u_q}^m = 0$ in linearen rekurrenten Folgen $\langle u_n \rangle$, Teil 1

Von

**Susanne Grünes**

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 21. März 2002
durch das w. M. Edmund Hlawka)


## Abstract

Let $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ be a linear complex recurrence sequence. Given $a, b, c$ nonzero complex and $k, l, m$ distinct natural numbers, we study equations $a{u_h}^k + b{u_n}^l + c{u_q}^m = 0$ in unknowns $(h, n, q) \in \mathbb{Z}^3$. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfies a recurrence relation $u_{n+t} = w_{t-1}u_{n+t-1} + \cdots + w_0 u_n$ $(w_0, \ldots, w_{t-1} \in \mathbb{C},\ w_0 \neq 0,\ n \in \mathbb{Z})$ with minimal order $t$. Consider the companion polynomial $P(z) = z^t - w_{t-1}z^{t-1} - \cdots - w_0 = \prod_{i=1}^{r}(z-\alpha_i)^{\sigma_i}$, with distinct roots $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ and multiplicities $\sigma_i > 0$. $r$ is called the rank of $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. There exist polynomials $f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, r)$ such that deg $f_i = \sigma_i - 1$ and $u_n = \sum_{i=1}^{r} f_i(n){\alpha_i}^n$ $(n \in \mathbb{Z})$. We assume that $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is nondegenerated, i.e., the quotients $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ for $1 \leq i < j \leq r$ are not roots of 1. The numbers $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ generate a multiplicative subgroup $G$ of $\mathbb{C}^*$. Let $g$ be the rank of the abelian group $G$.

**Theorem 1.** *Suppose that $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is a complex nondegenerated recurrence sequence and $g > 1$. Then the equation $a{u_h}^k + b{u_n}^l + c{u_q}^m = 0$ has only finitely many solutions $(h, n, q) \in \mathbb{Z}^3$.*

**Theorem 2.** *Let $K$ be a number field of degree $d$. Let $a, b, c \in K^*$ and $k, l, m$ distinct natural be given. We denote by $S$ the set of archimedean absolute values of $K$ together with those nonarchimedean absolute values $||_v$ of $K$ having $|\alpha_i|_v \neq 1$ for some $i$ $(1 \leq i \leq r)$. $S$ is a finite set with cardinality $s$. We write $\mathcal{M} = \max\{k, l, m\}$. Let $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ be nondegenerated and $g > 1$. Suppose that $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ as well as the coefficients of the polynomials $f_i$ are contained in $K$. Then the number of solutions $(h, n, q) \in \mathbb{Z}^3$ of the equation $a{u_h}^k + b{u_n}^l + c{u_q}^m = 0$ does not exceed $2^{s^7 2^{44d!(6^{t+\mathcal{M}})!}}$.*

The proofs of Theorem 1 and 2 are based on results of LAURENT, SCHLICKEWEI and W. M. SCHMIDT, which are consequences of the subspace theorem of W. M. SCHMIDT. We give examples that the statements of Theorem 1 and 2 cannot be extended to the case $g = 1$.

**Theorem 3.** *Let* $\alpha \in \mathbb{C}^*$ *be no root of* 1 *and* $\varepsilon, \zeta$ *roots of unity with* $\zeta^3 = 1$. *If a sequence* $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *is defined by* $u_n = A_1\left(\frac{1}{\alpha^n} + \zeta\varepsilon^f\alpha^{2f}(\varepsilon\alpha)^n\right)$ *with* $A_1 \in \mathbb{C}^*$, $f \in \frac{1}{3}\mathbb{Z}$ *then there exists an equation* $au_h{}^k + bu_n{}^l + cu_q{}^m = 0$ *with infinite many solutions* $(h, n, q) \in \mathbb{Z}^3$.

**Theorem 4.** *Let* $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *be a nondegenerated recurrence sequence with rank* $r > 1$. *If an equation* $bu_n{}^l + cu_q{}^m = K$ $(K \in \mathbb{C}^*)$ *has infinite many solutions then we have* $\{l, m\} = \{1, 2\}$ *and* $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *is described as in Theorem* 3.

## Einleitung

Die vorliegende Arbeit wurde als Dissertation im Februar 1997 unter dem Titel „Gleichungen $au_h{}^k + bu_n{}^l + cu_q{}^m = 0$ in linearen rekurrenten Folgen $\langle u_n \rangle$" an der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Wien eingereicht und angenommen.

Wir untersuchen die Gleichung $au_h{}^k + bu_n{}^l + cu_q{}^m = 0$, wobei $a, b, c \in \mathbb{C}$, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ eine lineare homogene Rekurrenzfolge mit konstanten Koeffizienten ist und $k, l, m$ paarweise verschiedene natürliche Zahlen sind. Wir werden in Theorem 3.1 Bedingungen angeben, unter denen die obige Gleichung für $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ höchstens endlich viele Lösungen $(h, n, q) \in \mathbb{Z}^3$ besitzt. Die Bedingungen werden ausschließlich durch die Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des charakteristischen Polynoms der Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ bestimmt. In Theorem 3.2 geben wir, falls $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ algebraisch ist, eine obere Schranke für die Anzahl der Lösungen an. In die Beweise der Theoreme 3.1 und 3.2 gehen Ergebnisse von LAURENT [2], SCHLICKEWEI und SCHMIDT [8, 10] ein. Diese beruhen auf dem Teilraumsatz vom W. M. SCHMIDT. Wir verwenden diese Resultate, ohne auf die tiefliegenden Beweise einzugehen.

Der Fall $c = 0$ wird in [8] behandelt. Für $b = c = 0$ werden wir zur Untersuchung der Gleichung $u_n = 0$ geführt. Diese wird erstmals von SKOLEM [13, 14] betrachtet.

Im 1. Kapitel geben wir eine Einführung in die Theorie der rekurrenten Folgen, soweit es für unsere Zwecke notwendig ist. Das zweite Kapitel handelt von Exponentialgleichungen $\sum_{i \in I} f_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}_i^{\boldsymbol{x}} = 0$ ($I$ eine endliche Menge), deren Koeffizienten Polynome sind. Zur Untersuchung dieser Gleichungen führen wir die Menge $S(\mathcal{P})$ und die Gruppe $H(\mathcal{P})$ ein. Wir zerlegen eine solche Gleichung in ein System von Teilgleichungen, deren Summe die ursprüngliche Exponentialgleichung ergibt. Läßt sich ein System von Teilsummen nicht weiter zerlegen, so bezeichnet man die Lösungsmenge des Gleichungssystems mit $S(\mathcal{P})$ ($\mathcal{P}$ beschreibt die Zerlegung der ursprüglichen Gleichung $\sum_{i\in I} f_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}_i^{\boldsymbol{x}} = 0$ in Teilsummen durch eine Partition der Indexmenge $I$). Ein Satz von LAURENT wird zitiert, der einen Zusammenhang zwischen $H(\mathcal{P})$ und $S(\mathcal{P})$ herstellt. Im 3. Kapitel werden die Hauptresultate dieser Arbeit formuliert. Theorem 3.1 besagt, daß $au_h{}^k + bu_n{}^l + cu_q{}^m = 0$ höchstens endlich viele Lösungen $(h, n, q)$ besitzt, wenn die von den Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des charakteristischen Polynoms der Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ erzeugte Gruppe $\langle\alpha_1, \dots, \alpha_r\rangle$ einen Rang $g > 1$ hat und wenn $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ nichtdegeneriert ist. Theorem 3.2 gibt eine obere Schranke für die Anzahl der Lösungen an, falls $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ algebraisch ist. Danach stellen wir die Gleichung $au_h{}^k + bu_n{}^l + cu_q{}^m = 0$ als eine spezielle Exponentialgleichung mit polynomialen Koeffizienten dar. Im 4. Kapitel wird für Partitionen $\mathcal{P}$ ohne einelementige Blöcke die Gruppe $H(\mathcal{P})$ betrachtet. Wir zeigen in Proposition 4.1: Ist der Rang $g$ der von den Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ erzeugten multiplikativen Gruppe größer als Eins, so gilt $H(\mathcal{P}) = \{(0, 0, 0)\}$. Im 5. Kapitel ziehen wir eine Folgerung aus dem Satz von SKOLEM-MAHLER-LECH. Wir wenden sie bei der Untersuchung von Mengen $S(\mathcal{P})$ an, wobei $\mathcal{P}$ Partitionen sind, welche einelementige Blöcke enthalten. Das beendet den Beweis von Theorem 3.1. Wir geben eine Abschätzung für die Anzahl der Lösungen von $au_h{}^k + bu_n{}^l + cu_q{}^m = 0$, wenn $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ algebraisch ist. Die Schranke hängt vom Grad der Körpererweiterung, von der Ordnung der Folge und von einer Zahl $s$ (=Anzahl der archimedischen Absolutbeträge auf dem Körper $K$ zusammen mit jenen nichtarchimedischen Absolutbeträgen $|\,|_v$ auf $K$, welche $|\alpha_i|_v \neq 1$ für ein $i$, $1 \le i \le r$, erfüllen) ab. Im 6. Kapitel bringen wir Beispiele, daß die Aussagen von Proposition 4.1 und der Theoreme 3.1 und 3.2 nicht auf den Fall $g = 1$ übertragen werden können. Ferner wird gezeigt, daß zu jeder Folge $u_n = A\left(\frac{1}{\alpha^{n+f}} + \zeta\varepsilon^f\alpha^{2f}(\varepsilon\alpha)^{n+f}\right)$, $A \in \mathbb{C}^*$, $\zeta^3 = 1$, $f \in \frac{1}{3}\mathbb{Z}$, $\varepsilon$ Einheitswurzel, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ keine Einheitswurzel, eine Gleichung $au_h{}^k + bu_n{}^l + cu_q{}^m = 0$ mit unendlich vielen Lösungen angegeben werden kann. Satz 6.3 sagt etwas über Gleichungen $bu_n{}^l + cu_q{}^m = K$ aus, die unendlich viele Lösungen besitzen. Wir geben die allgemeine Gestalt der Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ an. Weiters beschreiben wir einen Zusammenhang zwischen $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ und $b, c, K$ und zeigen $\{l, m\} = \{1, 2\}$.

Das Thema wurde von Herrn Professor WOLFGANG M. SCHMIDT, distinguished Professor an der State University von Colorado in Boulder und Cole Price-Träger 1972, gestellt. Ich bin ihm für seine spannenden Vorlesungen und seine Bereitschaft, die Arbeit zu leiten, zu großem Dank verpflichtet. Weiters danke ich Herrn Professor Viktor Losert vom mathematischen Institut der Universität Wien.

Die jetzige Version des 4. Kapitels wurde in Zusammenarbeit mit Professor Losert geschrieben. Ferner danke ich herzlichst Herrn Professor Johannes Schoißengeier vom mathematischen Institut der Universität Wien, derzeit an der Universität in Klagenfurt tätig, für seine Anregungen.

Die Arbeit ist sowohl in der Nationalbibliothek unter der Signatur 1499919-C.Neu Mag als auch in der Universitätsbibliothek Wien unter der Signatur D-29593 zu finden.

## 1. Allgemeines über Rekurrenzfolgen

Eine homogene lineare *Rekurrenzfolge* mit konstanten Koeffizienten ist eine nichttriviale Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ komplexer Zahlen, die für gewisse $v_0,\dots,v_{t-1}\in\mathbb{C}$, $v_0\neq 0$, einer Gleichung

$$u_{n+t} = v_{t-1}u_{n+t-1} + \cdots + v_0 u_n \quad (n\in\mathbb{Z}) \tag{1.1}$$

genügt. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ist also durch die Angabe von Anfangswerten $u_s,\dots,u_{s+t-1}$ für ein $s\in\mathbb{Z}$ und durch die Rekurrenzkoeffizienten $v_0,\dots,v_{t-1}$ bestimmt. Man sagt, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ wird durch eine Rekurrenz der Ordnung $t$ erzeugt.

Das *charakteristische Polynom* zu (1.1) ist definiert durch

$$P(z) = z^t - v_{t-1}z^{t-1} - \cdots - v_1 z - v_0 \tag{1.2}$$

Sei

$$P(z) = \prod_{j=1}^{r}(z-\alpha_j)^{\sigma_j}, \tag{1.3}$$

wobei $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ paarweise verschieden sind. $v_0\neq 0$ impliziert, daß keine der Zahlen $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ den Wert 0 annimmt.

Das folgende Ergebnis ist von grundlegender Bedeutung in der Theorie der rekurrenten Folgen.

**Satz 1.1.** (i) *Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Folge, welche die Beziehung* (1.1) *erfüllt. Wir setzen $v_0\neq 0$ voraus. Seien $\alpha_i$, $\sigma_i$ $(1\leq i\leq r)$ mittels* (1.2) *und* (1.3) *definiert, wobei die Zahlen $\alpha_i$ paarweise verschieden sind. Dann existieren für $1\leq i\leq r$ eindeutig bestimmte Polynome $f_i\in\mathbb{Q}(u_0,\dots,u_{t-1},\alpha_1,\dots,\alpha_r)[z]$ mit Grad $f_i<\sigma_i$, so daß*

$$u_n = \sum_{j=1}^{r} f_j(n)\alpha_j^{\,n} \quad (n\in\mathbb{Z}). \tag{1.4}$$

(ii) *Seien $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ paarweise verschiedene Zahlen in $\mathbb{C}$ und $\sigma_1,\dots,\sigma_r$ positive ganze Zahlen mit $\sum_{j=1}^{r}\sigma_j = t$. $v_0,\dots,v_{t-1}$ werden durch* (1.2) *und* (1.3) *festgelegt. Ferner seien für $1\leq j\leq r$ $f_j$*

*Polynome mit Grad* $f_j < \sigma_j$. *Dann erfüllt die durch* (1.4) *definierte Folge* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *die Rekurrenzrelation* (1.1).

Einen Beweis des Satzes findet man in [12].

Eine rekurrente Folge kann durch verschiedene Relationen analog (1.1) erzeugt werden. Falls $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ zwei Rekurrenzen der Ordnung $t$ erfüllt, etwa

$$u_{n+t} = \sum_{j=0}^{t-1} \lambda_j u_{n+j} = \sum_{j=0}^{t-1} \mu_j u_{n+j},$$

so liefert $s = \max\{j|\lambda_j \neq \mu_j\}$ durch

$$u_{n+s} = \sum_{j=0}^{s-1} -\frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_s - \mu_s} \cdot u_{n+j} \quad (n\in\mathbb{Z})$$

eine Rekurrenz der Ordnung $s < t$, welche $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ erzeugt. Man schließt daraus, daß es zu jeder rekurrenten Folge eine eindeutig bestimmte Rekurrenz minimaler Ordnung gibt. Wir beziehen uns auf diese Rekurrenz von minimaler Ordnung $t$, wenn wir von Rekurrenzkoeffizienten $v_0, \ldots, v_{t-1}$, dem charakteristischen Polynom etc. einer Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sprechen. Die Anzahl der Nullstellen des charakteristischen Polynoms heißt der *Rang* von $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Wie sehen alle Rekurrenzrelationen aus, die eine feste Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ erzeugen? Bemerkung 1.1 beantwortet mit Hilfe von Satz 1.1 diese Frage.

**Bemerkung 1.1.** Sei $P(z)$ das charakteristische Polynom zu der minimalen Rekurrenz der Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, sei $G(z)$ das charakteristische Polynom einer beliebigen Rekurrenz, die $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ erzeugt. Dann ist $P$ ein Teiler von $G$.

**Beweis.** $P(z) = \prod_{j=1}^r (z-\alpha_j)^{\sigma_j} = z^t - v_{t-1}z^{t-1} - \cdots - v_1 z - v_0$

Nach Satz 1.1 (i) besitzt $u_n$ die Darstellung

$$u_n = \sum_{j=1}^{r} f_j(n)\alpha_j{}^n \quad (n\in\mathbb{Z}) \tag{1.5}$$

Sei

$$G(z) = z^l - \mu_{l-1}z^{l-1} - \cdots - \mu_0.$$

$\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_s$ bezeichne jene Nullstellen von $G$, die nicht Wurzeln des charakteristischen Polynoms $P$ sind. Satz 1.1 ermöglicht es, $u_n$ in der Form

$$u_n = \sum_{j=1}^{s} f_j^*(n)\alpha_j{}^n \quad (n\in\mathbb{Z}) \tag{1.6}$$

zu schreiben. Dabei setzen wir $f_j^* = 0$ für alle $j$ mit $G(\alpha_j) \neq 0$.

Wir betrachten

$$G(z) \cdot P(z) = \prod_{j=1}^{s} (z - \alpha_j)^{\rho_j} = z^{t+l} - \lambda_{t+l-1} z^{t+l-1} - \cdots - \lambda_0.$$

Wegen Satz 1.1 (ii) erfüllt die Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ die Rekurrenzrelation

$$u_{n+t+l} = \sum_{j=0}^{t+l-1} \lambda_j u_{n+j} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Wenden wir Satz 1.1 (i) auf diese Relation an, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (1.5) und (1.6)

$$f_j = f_j^* \quad \text{für } 1 \leq j \leq r, \qquad f_j^* = 0 \quad \text{für } r+1 \leq j \leq s.$$

Mittels Satz 1.1 (ii) schließen wir aus der minimalen Rekurrenz, daß der Grad $f_j = \sigma_j - 1$ ist $(1 \leq j \leq r)$. Daher ist für $1 \leq j \leq r$ die Ordnung der Nullstelle $\alpha_j$ in $G$ größer als $\sigma_j - 1$. Es folgt, daß $P$ ein Teiler von $G$ ist. □

**Bemerkung 1.2.** Sei $P(z)$ das charakteristische Polynom der Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Dann gilt

$$f_i \neq 0 \quad (1 \leq i \leq \text{Rang von } \{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}).$$

Bevor wir uns der allgemeinen Gleichung

$$a{u_n}^k + b{u_m}^l + c{u_q}^h = 0$$

zuwenden, betrachten wir den Spezialfall

$$u_n = 0.$$

Das Problem, unter welchen Bedingungen die Gleichung $u_n = 0$ höchstens endlich viele Lösungen $n \in \mathbb{Z}$ hat, wurde in Arbeiten von Skolem, Mahler und Lech behandelt. Skolem [13, 14] führte 1933 eine neue Methode zum Studium gewisser diophantischer Gleichungen ein. Er entwickelte Funktionen einer $p$-adischen Variablen in Potenzreihen und untersuchte deren Nullstellen. Mahler [4] bediente sich ähnlicher Methoden, um Theorem 1.1 für algebraische Zahlen zu beweisen. Lech [3] verallgemeinerte diesen Satz für Körper der Charakteristik 0.

**Definition 1.1.** Unter der *a-Vielfachheit* $U(a)$ einer Rekurrenzfolge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ verstehen wir die Anzahl der Indizes $n$, die

$$u_n = a$$

erfüllen. Wir definieren die *Vielfachheit* $U$ durch

$$U = \sup_a U(a).$$

**Theorem 1.1** (SKOLEM-MAHLER-LECH). *Sei* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *eine lineare Rekurrenzfolge mit unendlicher* 0*-Vielfachheit. Dann gibt es eine natürliche Zahl* $d$ *und eine Teilmenge* $A \subset \{0, 1, \ldots, d-1\}$, *so daß*

$$u_n = 0 \quad \forall n \equiv a_i \pmod{d}, \quad a_i \in A.$$

*Höchstens endlich viele andere ganze Zahlen können der Gleichung* $u_n = 0$ *genügen.*

Die Voraussetzung, daß die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ in einem Körper $K$ der Charakteristik 0 liegt, ist für Theorem 1.1 notwendig.

**Beispiel.** Sei $K = \mathbb{Z}_p[t]$, $p$ eine Primzahl, $t$ transzendent über $\mathbb{Z}_p$. $u_n = (1+t)^n - 1 - t^n$ erfüllt die Rekurrenz

$$u_n = (2+2t)u_{n-1} - (1+3t+t^2)u_{n-2} + (t+t^2)u_{n-3}.$$

$u_n = 0$ gilt genau für die ganzzahligen Potenzen von $p$.

**Korollar 1.1.** *Sei* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *eine Rekurrenzfolge mit charakteristischem Polynom* (1.3). $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *habe unendliche* 0*-Vielfachheit. Dann ist für ein Paar* $i, j$, $1 \le i, j \le r$, $i \ne j$, $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ *eine Einheitswurzel.*

**Beweis.** Nach Theorem 1.1 ist für ein $a_1 \in A$

$$u_{a_1+yd} = 0 \quad \forall y \in \mathbb{Z}.$$

Wir drücken $u_{a_1+yd}$ durch die Beziehung (1.4) aus.

$$0 = \sum_{j=1}^{r} f_j(a_1+yd)\alpha_j{}^{a_1+yd} = \sum_{j=1}^{r} f_j(a_1+yd)\alpha_j{}^{a_1}(\alpha_j{}^d)^y$$

Die Rekurrenz zu $P(z)$ hat minimale Ordnung. Daher ist $g_j(y) := f_j(a_1+yd)\alpha_j{}^{a_1}$ ein nichttriviales Polynom in $y$ mit Grad $g_j = \sigma_j - 1$ $(1 \le j \le r)$. Wir haben

$$\sum_{j=1}^{r} g_j(y)(\alpha_j{}^d)^y = 0 \quad \forall y \in \mathbb{Z}.$$

Aus Satz 1.1 schließen wir, daß die Zahlen $\alpha_1{}^d, \ldots, \alpha_r{}^d$ nicht alle verschieden sind. Das heißt, es gibt ein Paar $(i, j)$, $i \ne j$, sodaß $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ eine Einheitswurzel ist. $\square$

**Bemerkung 1.3.** Die Aussage von Korollar 1.1. ist unabhängig von der erzeugenden Rekurrenz. Dies folgt direkt aus Bemerkung 1.1.

**Definition 1.2.** Eine Rekurrenzfolge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt *degeneriert*, wenn es ein Paar $(i,j)$, $i\neq j$ gibt, sodaß $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ eine Einheitswurzel ist. Andernfalls nennt man $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *nichtdegeneriert*.

In der Literatur werden oft Rekurrenzfolgen $\{u_n\}_{n\geq 0}$ untersucht. Begriffe und Sätze lassen sich auf Folgen $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ übertragen.

**Korollar 1.2.** *Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ nichtdegeneriert und periodisch. Dann gibt es eine komplexe Zahl $d$ und eine Einheitswurzel $\alpha$, so daß*

$$u_n = d\alpha^n.$$

**Beweis.** $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ist periodisch, das heißt, es existiert eine natürliche Zahl $p$ mit

$$u_{n+p} = u_n \quad \forall n\in\mathbb{Z}.$$

Seien $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(z)$ der Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Sei

$$P(z) = \prod_{i=1}^{r}(z-\alpha_i)^{\sigma_i}$$

Satz 1.1. erlaubt es, die Zahlen $u_n$ eindeutig in der Form

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} f_i(n){\alpha_i}^n$$

zu schreiben, wobei $f_i$ Polynome vom Grad kleiner als $\sigma_i$ sind.

Wir setzen

$$g_i(x) = f_i(x) - f_i(x+p){\alpha_i}^p, \quad 1\leq i\leq r.$$

$g_i(x)$ ist für $1\leq i\leq r$ ein Polynom mit Grad $g_i<\sigma_i$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = u_n - u_{n+p} &= \sum_{i=1}^{r} f_i(n){\alpha_i}^n - \sum_{i=1}^{r} f_i(n+p){\alpha_i}^{n+p} \\ &= \sum_{i=1}^{r}(f_i(n) - f_i(n+p){\alpha_i}^p){\alpha_i}^n = \sum_{i=1}^{r} g_i(n){\alpha_i}^n \quad \forall n\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sei zunächst

$$r\geq 2.$$

Da $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ nichtdegeneriert, existiert eine Zahl $\alpha_j$, $1\leq j\leq r$, welche keine Einheitswurzel ist. Wenn

$$f_j = c, \quad c \text{ konstant},$$

dann ist $g_j$ ungleich dem Nullpolynom, weil $\alpha_j{}^p \neq 1$ und $c \neq 0$. Falls $f_j$ nichtkonstant ist, kann $g_j$ nicht das Nullpolynom sein. Nach Satz 1.1 ist aber die Darstellung

$$\sum_{i=1}^{r} g_i(n)\alpha_i{}^n$$

eindeutig.

Also ist nur

$$r = 1$$

möglich. Die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ läßt sich in der Form

$$u_n = f(n)\alpha^n$$

schreiben.

Aus $|\alpha| > 1$ erhalten wir $\lim_{n\to\infty}|u_n| = \infty$, für $|\alpha| < 1$ ist $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. In beiden Fällen wäre $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ nichtperiodisch. Aus $|\alpha| = 1$ und $f$ nichtkonstant ergibt sich $\lim_{n\to\infty}|u_n| = \infty$. Daher ist $u_n = d\alpha^n$, $|\alpha| = 1$. Wegen

$$d\alpha^n = d\alpha^{n+p}$$

muß $\alpha$ eine Einheitswurzel sein. □

**Definition 1.3.** Eine Rekurrenzfolge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt *algebraisch*, wenn in der Darstellung (1.4) die Koeffizienten der Polynome $f_j$ und die Zahlen $\alpha_j$, $1 \leq j \leq r$, in einem algebraischen Zahlkörper $K$ liegen.

In zahlreichen Artikeln wurden die Vielfachheiten von Folgen $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ untersucht. Die meisten Autoren beschäftigen sich mit Folgen der Ordnung 2 oder stellen andere stark einschränkende Bedingungen. Wir erwähnen folgende allgemeine Ergebnisse:

Evertse, Györy, Stewart und Tijdeman [1] haben für eine komplexe Rekurrenzfolge $\{u_n\}_0^\infty$ gezeigt: Falls $\{u_n\}_0^\infty$ nichtperiodisch und nichtdegeneriert ist, dann gibt es nur endlich viele Paare $m, n$ mit $m \neq n$ und

$$u_m = u_n.$$

Speziell gilt, daß jede nichtperiodische und nichtdegenerierte Rekurrenzfolge endliche Vielfachheit besitzt.

Schlickewei [6] hat als erster eine obere Schranke für die Vielfachheit algebraischer $\{u_n\}_0^\infty$ der Ordnung $t$ angegeben, welche nichtdegeneriert und nichtperiodisch sind. Die Schranke ist gleichmäßig, denn es gehen weder die Koeffizienten der Polynome $f_i$ noch die Werte der Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ein. Sie hängt allein von $[K : \mathbb{Q}]$, $t$ und der Anzahl $\omega$ der Primideale in der Zerlegung von $(\alpha_1), \dots, (\alpha_r)$ ab. Der Beweis beruht auf einer von SCHLICKEWEI gefundenen $p$-adischen Verallgemeinerung des Teilraumsatzes. Siehe dazu [6] und die darin angegebene Literatur.

Kürzlich hat SCHLICKEWEI [7] dieses Resultat verbessert. Er gibt für die 0-Vielfachheit einer nichtdegenerierten Folge der Ordnung $t$ die Schranke

$$d^{6t^2} 2^{2^{28t!}}$$

an, wobei die Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des charakteristischen Polynoms in einem algebraischen Zahlkörper $K$ vom Grad $d$ liegen.

## 2. Exponentialgleichungen mit polynomialen Koeffizienten

Sei $I$ eine endliche Menge und $N$ eine natürliche Zahl. Ferner seien Polynome $f_i$, $i \in I$ gegeben, deren Koeffizienten in $\mathbb{C}$ liegen. Für $1 \le j \le N$, $i \in I$ seien $\alpha_{ij} \neq 0$ komplexe Zahlen. Setze $\boldsymbol{\alpha}_i^{\boldsymbol{x}} = {\alpha_{i1}}^{x_1} \cdot \dots \cdot {\alpha_{iN}}^{x_N}$, wobei $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)$.

Wir betrachten Gleichungen der Gestalt

$$\sum_{i \in I} f_i(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\alpha}_i^{\boldsymbol{x}} = 0 \tag{2.1}$$

in den Variablen $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{Z}^N$. Sei $\mathcal{P}$ eine Partition von $I$ und $\pi$ eine Teilmenge von $I$. $\pi \in \mathcal{P}$ bedeutet, daß $\pi$ ein Block der Partition $\mathcal{P}$ ist. Wir untersuchen das Gleichungssystem

$$\sum_{i \in \pi} f_i(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\alpha}_i^{\boldsymbol{x}} = 0 \quad (\pi \in \mathcal{P}) \tag{2.$\mathcal{P}$}$$

Jede Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^N$ von (2.$\mathcal{P}$) erfüllt auch (2.1). Die Umkehrung ist nicht unbedingt richtig.

**Definition 2.1.** $S(\mathcal{P})$ sei die Menge aller $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^N$, für die (2.$\mathcal{P}$) gilt, die aber für keine echte Verfeinerung $\mathcal{Q}$ von $\mathcal{P}$ das System (2.$\mathcal{Q}$) lösen.

Jede Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^N$ von (2.1) liegt in $S(\mathcal{P})$ für eine Partition $\mathcal{P}$. Diese ist nicht eindeutig bestimmt. Um die Anzahl der Lösungen von (2.1) abzuschätzen, genügt es, die Mengen $S(\mathcal{P})$ zu untersuchen.

Für $i, j \in I$ schreiben wir $i \sim j$, falls $i, j$ in einem Block der Partition $\mathcal{P}$ liegen.

**Definition 2.2.** Sei $H(\mathcal{P}) \subset \mathbb{Z}^N$ die Menge aller $\boldsymbol{x}$, für die

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\alpha}_j^{\boldsymbol{x}} \quad \forall i,j \text{ mit } i \sim j$$

gilt.

Offensichtlich ist $H(\mathcal{P})$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}^N$. Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^N$ definieren wir

$$|\boldsymbol{x}| = \max_{1 \le j \le N} \{|x_j|\}.$$

Laurent [2] hat folgenden Zusammenhang zwischen $H(\mathcal{P})$ und $S(\mathcal{P})$ bewiesen.

**Theorem 2.1.** *Sei $\boldsymbol{x} \in S(\mathcal{P})$, so daß die Koeffizienten $f_i(\boldsymbol{x}) \neq 0$ $\forall i \in I$. Dann existieren $x' \in \mathbb{Z}^N$, $x'' \in H(\mathcal{P})$ mit*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'' \tag{2.2}$$

$$|\boldsymbol{x}'| \ll \log |\boldsymbol{x}|. \tag{2.3}$$

*Die Konstante in* (2.3) *ist unabhängig von $\boldsymbol{x}$.*

Wir werden diesen Satz in folgender Form verwenden:

**Korollar 2.1.** *Es gelten die Voraussetzungen von Theorem* 2.1. *Enthält die Gruppe $H(\mathcal{P})$ nur $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}^N$, dann ist $S(\mathcal{P})$ endlich.*

**Beweis.** *Sei $\boldsymbol{x} \in S(\mathcal{P})$.* Aus (2.2) und $H(\mathcal{P}) = \{\mathbf{0}\}$ folgt

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$$

Wegen (2.3) ist $|\boldsymbol{x}| \ll \log |\boldsymbol{x}|$. Es existieren höchstens endlich viele natürliche Zahlen $n$ mit

$$n < K \cdot \log n, \quad K \text{ eine Konstante.}$$

Daher enthält $S(\mathcal{P})$ höchstens endlich viele Elemente. □

Wir erwähnen, daß Theorem 2.1 eine Konsequenz des äußerst tiefliegenden Teilraumsatzes von W. Schmidt ist.

In [10] gaben Schlickewei und Schmidt eine quantitative Version von Theorem 2.1. Die Beweismethode ist eine Verallgemeinerung jener in [6]. Danach fanden Schlickewei und van der Poorten [5] im Fall $N = 1$ einen einfacheren Beweis, der auch eine bessere Abschätzung lieferte. Sie benützten dabei $p$-adische Methoden. Allerdings ist nicht zu sehen, wie man diesen Zugang für $N > 1$ verallgemeinern könnte.

**Theorem 2.2.** *Wir setzen voraus, daß in* (2.1) *die Koeffizienten der Polynome $f_i$ und die Zahlen $\alpha_{ij}$ in einem algebraischen Zahlkörper* *vom Grad $d$ liegen. Sei $S$ die Menge bestehend aus den archimedischen Absolutbeträgen auf $K$ und jenen nichtarchimedischen Absolutbeträgen $|\,|_v$, welche*

$$|\alpha_{ij}|_v \neq 1 \textit{ für ein Paar } (i,j), \quad 1 \leq j \leq N, i \in I$$

*erfüllen. Dabei sind $|\,|_v$ so normiert, daß sie den gewöhnlichen bzw. einen $p$-adischen Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ fortsetzen. $S$ ist eine endliche Menge. $s$ bezeichne die Kardinalität von $S$ und $\delta$ den maximalen Grad der Polynome $f_i$, $i \in I$. Wir setzen*

$$D = \binom{N+\delta}{N}.$$

*Ferner seien die Voraussetzungen von Theorem* 2.1 *gegeben und $H(\mathcal{P}) = \{\mathbf{0}\}$. Dann besitzt $S(\mathcal{P})$ die Kardinalität*

$$|S(\mathcal{P})| < 2^{20N^4 + Ns^7 2^{43d!(D|I|)!}}.$$

Der Beweis steht in [10] und beruht wieder auf dem Teilraumsatz.

## 3. Die Gleichung $a \cdot u_h{}^k + b \cdot u_n{}^l + c \cdot u_q{}^m = 0$

**1. Einleitung.** Sei $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ eine lineare Rekurrenzfolge. Gegeben sind komplexe Zahlen $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ und drei *verschiedene* natürliche Zahlen $k$, $l$, $m$. Gesucht sind Bedingungen, unter denen die Gleichung

$$a \cdot u_h{}^k + b \cdot u_n{}^l + c \cdot u_q{}^m = 0 \tag{3.1}$$

höchstens endlich viele Lösungen $(h,n,q) \in \mathbb{Z}^3$ hat.

Sei $t$ die Ordnung und $r$ der Rang der Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Es existieren komplexe Zahlen $w_0, \ldots, w_{t-1}, w_0 \neq 0$, welche die Relation

$$u_{n+t} = w_{t-1} \cdot u_{n+t-1} + \cdots + w_0 \cdot u_n \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3.2}$$

erfüllen. Das charakteristische Polynom von $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ habe die Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ mit den Vielfachheiten $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$. Nach §1 existieren Polynome $f_i \neq 0\,(i = 1, \ldots, r)$ mit Grad $f_i = \sigma_i - 1$ und

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} f_i(n) \alpha_i{}^n \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

Wir betrachten die durch $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ erzeugte multiplikative Gruppe. Diese habe den (torsionsfreien) Rang $g$. Darunter verstehen wir die Anzahl der Faktoren in der Zerlegung von $G/T$ in ein direktes Produkt von zyklischen Untergruppen, wobei $T$ die

Torsionsuntergruppe von $G$ ist. Diese Anzahl ist nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen eindeutig bestimmt. Wir zitieren ihn in der folgenden Version.

**Fundamentalsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen.** *Jede nichttriviale endlich erzeugte abelsche Gruppe $G$ ist isomorph zu einem direkten Produkt zyklischer Gruppen*

$$G \cong (\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z}) \tag{3.4}$$

*mit $m_1|m_2|\ldots$ und $m_1 \neq 1$. Die Darstellung ist eindeutig gegeben. Der Rang $g$ von $G$ ist definiert als Anzahl der $m_i = 0$.*

Mit obigen Bezeichnungen können wir nun das Hauptresultat der Arbeit formulieren.

**Theorem 3.1.** *Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine nichtdegenerierte Rekurrenzfolge. Wir setzen voraus, daß die von den Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ erzeugte Gruppe $G$ einen Rang $g > 1$ habe. Dann besitzt die Gleichung*

$$a \cdot u_h{}^k + b \cdot u_n{}^l + c \cdot u_q{}^m = 0$$

*höchstens endlich viele Lösungen $(h, n, q) \in \mathbb{Z}^3$.*

Der Beweis gliedert sich in mehrere Teile. Zuerst geben wir einen allgemeinen Rahmen für das Problem. In §4 wird für eine beliebige Partition $\mathcal{P}$ ohne Singletons die Gruppe $H(\mathcal{P})$ betrachtet. Mit der Untersuchung der Gleichung

$$a \cdot u_h{}^k + b \cdot u_n{}^l = K, \tag{3.5}$$

$K$ eine Konstante, beenden wir in §5 den Beweis. Die Gleichung (3.5) tritt auf, wenn die Partition $\mathcal{P}$ ein Singleton enthält.

Schlickewei und Schmidt [8] haben im Fall $K = 0$ die Gleichung (3.5) behandelt. Wir führen den Begriff einer Ausnahmefolge ein, um Theorem 1 in [8] aussprechen zu können.

**Definition 3.1.** Eine lineare Rekurrenzfolge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt *Ausnahmefolge bezüglich $a$, $b$, $k$, $l$* (englisch: $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is exceptional with respect to $a$, $b$, $k$, $l$), wenn

$$u_n = f(n)\alpha^n,$$

d. h., wenn sie den Rang 1 hat und eine der beiden folgenden Alternativen eintritt.

(i) $\alpha$ ist eine Einheitswurzel.
(ii) $f(n)$ ist eine Konstante $D$, und es existiert eine ganze Zahl $v \equiv 0 \mod \mathrm{ggT}(k, l)$ mit $aD^k = bD^l\alpha^v$.

**Theorem 1** (SCHLICKEWEI, SCHMIDT). *Seien $a, b \in \mathbb{C}^*$ und $k, l$, $k \neq l$ natürliche Zahlen. Es sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ keine Ausnahmefolge bezüglich $a$, $b$, $k$, $l$. Ferner sei die Folge nichtdegeneriert. Dann besitzt die Gleichung*

$$a \cdot {u_h}^k = b \cdot {u_n}^l$$

*höchstens endlich viele Lösungen $(h, n) \in \mathbb{Z}^2$.*

Den Beweis findet man in [8].

Theorem 1 behandelt beliebige rekurrente Folgen. In [8] wird für eine algebraische Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ein quantitatives Resultat gegeben.

Sei $K$ ein algebraischer Zahlkörper vom Grad $d$. Weiter sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ über $K$ definiert, das bedeutet, die Nullstellen $\alpha_i$ des charakteristischen Polynoms und die Koeffizienten $f_i$ in der Darstellung (3.3) liegen in $K$. Wir bezeichnen mit $S$ die Menge der archimedischen Absolutbeträge auf $K$ zusammen mit den nichtarchimedischen Absolutbeträgen $|\ |_v$ auf $K$, welche

$$|\alpha_i|_v \neq 1 \quad \text{für ein } i, \quad 1 \leq i \leq r,$$

erfüllen. Dabei sind die Absolutbeträge so normiert, daß sie den gewöhnlichen oder einen $p$-adischen Absolutbetrag fortsetzen. $S$ ist eine endliche Menge, und wir schreiben $s$ für die Kardinalität von $S$.

**Theorem 2** (SCHLICKEWEI, SCHMIDT [8]). *Seien $a, b \in K^*$ und $l$, $k$, $l < k$ natürliche Zahlen. Die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ habe die Ordnung $t$, den Rang $r > 1$ und sei nichtdegeneriert. Dann besitzt die Gleichung*

$$a \cdot {u_h}^k = b \cdot {u_n}^l$$

*höchstens*

$$2^{s^7 2^{44d!(4^{t+k})!}}$$

*Lösungen $(h, n) \in \mathbb{Z}^2$.*

Der Beweis verwendet Theorem 2.2.

Für die Gleichung (3.1) geben wir eine analoge Abschätzung, welche ebenfalls auf Theorem 2.2 beruht.

**Theorem 3.2.** *Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine nichtdegenerierte Folge. Es gelten die obigen Bezeichnungen. Die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sei über $K$ definiert. Der Rang $g$ der von $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ erzeugten Gruppe sei größer Eins. Seien $a, b, c \in K^*$. Wir setzen*

$$\mathcal{M} = \max\{k, l, m\}.$$

*Dann existieren höchstens*

$$2^{s^7 2^{44d!(6^{t+\mathcal{M}})!}}$$

*Lösungen* $(h,n,q)\in\mathbb{Z}^3$ *der Gleichung* (3.1).

Der Beweis folgt im 5. Kapitel.

**2. Der allgemeine Rahmen.** Es sei

$A_k$ die Menge der $k$-Tupel $\kappa = (i_1,\dots,i_k)$ mit $1\le i_1\le\cdots\le i_k\le r$,
$A_l$ die Menge der $l$-Tupel $\lambda = (i_1,\dots,i_l)$ mit $1\le i_1\le\cdots\le i_l\le r$,
$A_m$ die Menge der $m$-Tupel $\mu = (i_1,\dots,i_m)$ mit $1\le i_1\le\cdots\le i_m\le r$.

Von nun an bedeute $\kappa$ ein Element von $A_k$. Ebenso $\lambda$ ein Element von $A_l$ und $\mu$ ein Element von $A_m$. Wir setzen

$$A = A_k\cup A_l\cup A_m.$$

Weiters sei $\mathcal{P}$ eine Partition von $A$. Wir schreiben $\alpha\sim\beta$, falls $\alpha,\beta\in A$ im selben Block von $\mathcal{P}$ liegen. Andernfalls schreiben wir $\alpha\not\sim\beta$. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $A$. Für $\lambda\in A_l$ setzen wir

$$\varphi_\lambda = \alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_l},\quad \lambda=(i_1,\dots,i_l). \tag{3.6}$$

Analog werden $\varphi_\kappa$ und $\varphi_\mu$ definiert.

Wir wählen für $u_n$ die Darstellung (3.3) und setzen diese in die Gleichung

$$a\cdot u_h{}^k + b\cdot u_n{}^l + c\cdot u_q{}^m = 0$$

ein. Das führt zu

$$a\left(\sum_{i=1}^r f_i(h)\alpha_i{}^h\right)^k + b\left(\sum_{i=1}^r f_i(n)\alpha_i{}^n\right)^l + c\left(\sum_{i=1}^r f_i(q)\alpha_i{}^q\right)^m = 0.$$

Der erste Summand dieser Gleichung hat die folgende Gestalt.

$$a\left(\sum_{i=1}^r f_i(h)\alpha_i{}^h\right)^k =$$

$$= a\cdot\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r=0\\ i_1+\cdots+i_r=k}}^{k}\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_r!}f_1{}^{i_1}(h)\cdot\alpha_1{}^{h\cdot i_1}\cdots f_r{}^{i_r}(h)\cdot\alpha_r{}^{h\cdot i_r} =$$

$$= a\cdot\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r=0\\ i_1+\cdots+i_r=k}}^{k}\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_r!}f_1{}^{i_1}\cdots f_r{}^{i_r}(h)\cdot(\alpha_1{}^{i_1})^h\cdots(\alpha_r{}^{i_r})^h \tag{3.7}$$

Dabei haben wir den polynomischen Lehrsatz benützt. Wir schreiben die rechte Seite von (3.7) anders auf. Jedem Summanden rechts entspricht genau ein $k$-Tupel, in welchem

$i_1$-mal die Zahl 1 vorkommt,
$i_2$-mal die Zahl 2 vorkommt,
$\vdots$
$i_r$-mal die Zahl r vorkommt,

wobei die Zahlen $1, \ldots, r$ wachsend angeordnet werden. Also treten genauso viele Summanden auf, wie es Elemente in $A_k$ gibt. Wir setzen

$$F_\kappa(h) = a \cdot \frac{k!}{i_1! i_2! \cdots i_r!} {f_1}^{i_1}(h) \cdots {f_r}^{i_r}(h).$$

Daher besitzt $a\left(\sum_{i=1}^r f_i(h){\alpha_i}^h\right)^k$ eine Darstellung

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^r f_i(h){\alpha_i}^h\right)^k = \sum_{\kappa \in A_k} F_\kappa(h) \cdot {\varphi_\kappa}^h$$

Ebenso läßt sich auch

$$b \cdot \left(\sum_{i=1}^r f_i(n){\alpha_i}^n\right)^l = \sum_{\lambda \in A_l} G_\lambda(n) \cdot {\varphi_\lambda}^n$$

und

$$c \cdot \left(\sum_{i=1}^r f_i(q){\alpha_i}^q\right)^m = \sum_{\mu \in A_m} H_\mu(q) \cdot {\varphi_\mu}^q$$

schreiben, wobei $G_\lambda(n)$ ein ganzzahliges Vielfaches von $bf_{j_i}(n) \cdots f_{j_l}(n)$ für $\lambda = (j_1, \ldots, j_l) \in A_l$ bezeichnet und $H_\mu(q)$ analog definiert wird.

Insgesamt erhalten wir, daß sich die Gleichung

$$a \cdot {u_h}^k + b \cdot {u_n}^l + c \cdot {u_q}^m = 0$$

umformen läßt zu

$$\sum_{\kappa \in A_k} F_\kappa(h) \cdot {\varphi_\kappa}^h + \sum_{\lambda \in A_l} G_\lambda(n) \cdot {\varphi_\lambda}^n + \sum_{\mu \in A_m} H_\mu(q) \cdot {\varphi_\mu}^q = 0. \qquad (3.8)$$

Dies ist eine Gleichung vom Typ (2.1)

$$\sum_{i \in I} f_i(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\alpha}_i^{\boldsymbol{x}} = 0,$$

wenn wir $N = 3$, $\boldsymbol{x} = (h, n, q)$, $I = A$ und

$$\boldsymbol{\alpha}_\kappa = (\varphi_\kappa, 1, 1), \qquad \boldsymbol{\alpha}_\lambda = (1, \varphi_\lambda, 1), \qquad \boldsymbol{\alpha}_\mu = (1, 1, \varphi_\mu)$$

setzen.

Zu einer vorgegebenen Gleichung (3.1) gibt es endlich viele Partitionen von $A$. Im Hinblick auf §2 genügt es zu zeigen, daß $S(\mathcal{P})$ für jede Partition $\mathcal{P}$ von $A$ endlich ist. Dann ist nämlich die Anzahl der Lösungen von (3.8) und damit auch von (3.1) endlich.

Wir werden die Partitionen danach unterscheiden, ob sie ein Singleton enthalten, oder ob sie nur aus Blöcken mit mindestens zwei Elementen bestehen. Denn im zweiten Fall können wir den Satz von LAURENT benützen. Dieser ermöglicht es, statt $S(\mathcal{P})$ die Gruppe $H(\mathcal{P})$ zu untersuchen. Da (3.8) eine Gleichung vom Typ

$$\sum_{i \in I} f_i(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\alpha}_i^{\boldsymbol{x}} = 0$$

ist, können wir Korollar 2.1, welches eine Folgerung aus dem Satz von LAURENT darstellt, auf (3.8) anwenden.

Im nächsten Kapitel betrachten wir jene Partitionen, die ausschließlich aus Blöcken mit mindestens zwei Elementen bestehen. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 3.1.** *Wenn $\mathcal{P}$ kein Singleton besitzt und $\boldsymbol{x} \in S(\mathcal{P})$, dann ist*

$$f_i(\boldsymbol{x}) \neq 0 \quad \forall i \in I.$$

*Es sind also die Voraussetzungen von Theorem* 2.1 *und Korollar* 2.1 *erfüllt.*

**Beweis.** Sei $\boldsymbol{x} \in S(\mathcal{P})$ mit $f_{i_0}(\boldsymbol{x}) = 0$ für ein $i_0 \in I$. $B$ bezeichne den Block, der $i_0$ enthält. Es ist

$$f_{i_0}(\boldsymbol{x}) \alpha_{i_0}{}^{\boldsymbol{x}} = 0$$

Aus $\boldsymbol{x} \in S(\mathcal{P})$ folgt daher

$$\sum_{i \in B \setminus \{i_0\}} f_i(\boldsymbol{x}) \alpha_{i_0}{}^{\boldsymbol{x}} = \sum_{i \in B \setminus \{i_0\}} f_i(\boldsymbol{x}) \alpha_{i_0}{}^{\boldsymbol{x}} + f_{i_0}(\boldsymbol{x}) \alpha_{i_0}{}^{\boldsymbol{x}} = 0.$$

Das ist ein Widerspruch zur Definition von $S(\mathcal{P})$. □

## Literatur

[1] Evertse, J. H., Győry, K., Stewart, C. L., Tijdeman, R. (1988) *S*-unit equations and their applications. New Advances in Transcendence Theory (Baker, A. ed.), Cambridge Univ. Press

[2] Laurent, M. (1989) Équations exponentielles-polynômes et suites récurrentes linéaires, II. – J. Number Theory **31**: 24–53

[3] Lech, C. (1953) A note on recurring series. – Ark. Mat. **2**: 417–421
[4] Mahler, K. (1935) Eine arithmetische Eigenschaft der Taylorkoeffizienten rationaler Funktionen. – Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **38**: 50–60
[5] Van Der Poorten, A. J., Schlickewei, H. P. (1991) Zeros of recurrence sequences. – Bull. Austral. Math. Soc. **44**: 215–223
[6] Schlickewei, H. P. (1993) Multiplicities of algebraic linear recurrences. – Acta. Math. **170**: 151–180
[7] Schlickewei, H. P. (1996) Multiplicities of recurrence sequences. – Acta. Math. **176**: 171–243
[8] Schlickewei, H. P., Schmidt, W. M. (1993) Equations $au_n{}^l = bu_m{}^k$ satisfied by members of recurrence sequences. – Proc. Amer. Math. Soc. **118**: 1043–1051
[9] Schlickewei, H. P., Schmidt, W. M. (1993) Linear equations in members of recurrence sequences. – Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **20**: 219–246
[10] Schlickewei, H. P., Schmidt, W. M. (1993) On polynomial-exponential equations. – Math. Ann. **296**: 339–361
[11] Schlickewei, H. P., Schmidt, W. M. (1995) The intersection of recurrence sequences. – Acta. Arith. **72**: 1–44
[12] Shorey, T. N., Tijdeman, R. (1986) Exponential diophantine equations. Cambridge University Press
[13] Skolem, Th. (1933) Einige Sätze über gewisse Reihenentwicklungen und exponentiale Beziehungen mit Anwendung auf diophantische Gleichungen. – Oslo Vid. akad. Skrifter I, Nr 6
[14] Skolem, T. (1934) Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentieller Gleichungen und diophantischer Gleichungen. – C. r. 8 congr. scand. à Stockholm: 163–188

**Anschrift des Verfassers:** Dr. Susanne Grünes, Salzgries 3/45, A-1010 Wien.