Sitzungsber. Abt. II (2002) 211: 39–81

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Gleichungen $au_h{}^k + bu_n{}^l + cu_q{}^m = 0$ in linearen rekurrenten Folgen $\langle u_n \rangle$, Teil 2

Von

Susanne Grünes

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 21. März 2002
durch das w. M. Edmund Hlawka)

4. Die Gruppen $H(\mathcal{P})$

Wir setzen die Situation und die Bezeichnungen von §3 voraus. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ in einer festen (aber nicht beliebigen) Anordnung (die wir später genauer beschreiben wollen) gegeben. Mit G bezeichnet man die von den Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ erzeugte multiplikative Untergruppe von $\mathbb{C}^*$.

Sei $\mathcal{P}$ eine Partition von A. In diesem Abschnitt betrachten wir nur Partitionen, welche keinen einelementigen Block enthalten. Bezugnehmend auf §3 können wir jetzt $H(\mathcal{P})$ in folgender Weise charakterisieren. $H(\mathcal{P})$ ist die Menge aller Tripel $(K, L, M) \in \mathbb{Z}^3$ mit

$$\varphi_{\kappa_1}{}^K = \varphi_{\kappa_2}{}^K \quad \text{für} \quad \kappa_1 \sim \kappa_2, \tag{4.1}$$

$$\varphi_{\lambda_1}{}^L = \varphi_{\lambda_2}{}^L \quad \text{für} \quad \lambda_1 \sim \lambda_2, \tag{4.2}$$

$$\varphi_{\mu_1}{}^M = \varphi_{\mu_2}{}^M \quad \text{für} \quad \mu_1 \sim \mu_2, \tag{4.3}$$

$$\varphi_{\kappa}{}^K = \varphi_{\lambda}{}^L \quad \text{für} \quad \kappa \sim \lambda, \tag{4.4}$$

$$\varphi_{\lambda}{}^L = \varphi_{\mu}{}^M \quad \text{für} \quad \lambda \sim \mu, \tag{4.5}$$

$$\varphi_{\mu}{}^M = \varphi_{\kappa}{}^K \quad \text{für} \quad \mu \sim \kappa. \tag{4.6}$$

Dabei ist $\kappa \in A_k$, $\lambda \in A_l$, $\mu \in A_m$ und nach (3.6) stellen (4.1)–(4.6) Identitäten der Gruppe G dar.

Wir werden in Proposition 4.1 zeigen, daß $H(\mathcal{P}) = \{(0,0,0)\}$, falls $\mathcal{P}$ eine Partition ohne Singleton ist und zusätzliche Bedingungen erfüllt sind. Aus dem Englischen übernehmen wir das Wort Singleton für einen einelementigen Block.

Zuerst vereinfachen wir die Relationen (4.1)–(4.6), indem wir G durch eine additive Untergruppe von $\mathbb{Z}^r$ ersetzen. Dies erlaubt es uns, die multiplikativen Relationen (4.1)–(4.6) in additiver Form zu schreiben.

Proposition 4.1. *Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine nichtdegenerierte Rekurrenzfolge und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Die von $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ erzeugte multiplikative Gruppe habe den Rang g*

$$g > 1.$$

Sei $\mathcal{P}$ eine Partition von A ohne einelementige Blöcke. Dann ist $H(\mathcal{P}) = \{(0,0,0)\}$.

Der Beweis wird indirekt geführt. Sei also (K, L, M) ein nichttriviales Element in $H(\mathcal{P})$. Wir geben zunächst einen allgemeinen Überblick und führen einige Begriffe ein. Dann folgt der Beweis von Proposition 4.1, der allerdings auf den anschließend behandelten Propositionen 4.2, 4.3 aufbaut.

Zerlegt man G nach dem Satz über endlich erzeugte abelsche Gruppen in ein direktes Produkt, so übertragen sich (4.1)–(4.6) auf die Komponenten. Es genügt daher, diese Gleichungen für torsionsfreie Gruppen zu untersuchen, denn gilt (4.1)–(4.6) für den torsionsfreien Teil und ist g_0 die Ordnung der Torsionsuntergruppe, dann liegt (g_0K, g_0L, g_0M) in $H(\mathcal{P})$. Sei g der Rang von G. Dann lassen sich die Zahlen α_i in der Form

$$\alpha_i = \varepsilon_i \cdot {\beta_1}^{x_{i1}} \cdots {\beta_g}^{x_{ig}} \quad (1 \le i \le r) \tag{4.7}$$

darstellen, wobei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ Einheitswurzeln sind und $\beta_1, \ldots, \beta_g$ in G liegen. Sei $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ig}) \in \mathbb{Z}^g$. Wir definieren für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^g$

$$f(\boldsymbol{x}) = (v_1, \ldots, v_r) \tag{4.8}$$

mit $v_i = \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x} \rangle$ $(1 \le i \le r)$.

f besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i) f ist eine lineare Funktion von $\mathbb{Z}^g$ in $\mathbb{Z}^r$ (bzw. $\mathbb{R}^g$ in $\mathbb{R}^r$).
(ii) f ist injektiv.

Beweis. (i) gilt wegen der Linearität des inneren Produktes.

(ii) Nach dem Fundamentalsatz für abelsche Gruppen läßt sich jedes $\alpha \in G$ eindeutig schreiben als

$$\alpha = \varepsilon \cdot \beta_1{}^{x_1} \cdots \beta_g{}^{x_g}.$$

Die Zuordnung

$$\tilde{f}(\alpha) = (x_1, \ldots, x_g)$$

definiert einen Homomorphismus $\tilde{f}\colon G \to \mathbb{Z}^g$. Offensichtlich ist $\tilde{f}$ eine surjektive Abbildung. Weiters ist $\tilde{f}(\alpha_i) = \boldsymbol{x}_i$. Da $\tilde{f}$ ein Homomorphismus ist, gilt

$$\tilde{f}(\alpha_1{}^{\lambda_1} \cdots \alpha_r{}^{\lambda_r}) = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{x}_r, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}(1 \le i \le r).$$

Die Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ erzeugen $\mathbb{Z}^g$, weil $\tilde{f}$ surjektiv ist. Angenommen $f(\boldsymbol{x}) = 0$. Dann folgt

$$\langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \quad (1 \le i \le r).$$

Dies gilt dann auch für jede Linearkombination der $\boldsymbol{x}_i$, also $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ und damit $\boldsymbol{x} = 0$. □

Aus den Punkten (i) und (ii) schließen wir, daß f den $\mathbb{Z}^g$ in ein g-dimensionales Gitter Γ in $\mathbb{R}^r$ abbildet.

Sei

$$s_{\boldsymbol{v}}(\omega) = v_{i_1} + \cdots + v_{i_u} \quad \text{für } \omega = (i_1, \ldots, i_u) \in A \text{ und } \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}^r. \tag{4.9}$$

Wir definieren $\overline{s}_v(\omega)$ durch

$$\overline{s}_{\boldsymbol{v}}(\omega) = \begin{cases} K \cdot s_{\boldsymbol{v}}(\omega) & \text{für } \omega \in A_k \\ L \cdot s_{\boldsymbol{v}}(\omega) & \text{für } \omega \in A_l \\ M \cdot s_{\boldsymbol{v}}(\omega) & \text{für } \omega \in A_m. \end{cases} \tag{4.10}$$

Wir schreiben öfter $\overline{s}(\omega)$ statt $\overline{s}_{\boldsymbol{v}}(\omega)$ (bzw. $s(\omega)$ statt $s_{\boldsymbol{v}}(\omega)$), falls aus dem Zusammenhang hervorgeht, welcher Vektor $\boldsymbol{v}$ gemeint ist.

Dann sind die Gleichungen (4.1)–(4.6) für den torsionsfreien Teil gleichbedeutend damit, daß

$$\overline{s}_{\boldsymbol{v}}(\omega_1) = \overline{s}_{\boldsymbol{v}}(\omega_2) \quad \text{für } \omega_1 \sim \omega_2, \tag{4.11}$$

für alle $(v_1, \ldots, v_r) \in \Gamma$ gilt. Wir geben den Beweis für die Äquivalenz

$$\varphi_{\kappa_1}{}^K = \varphi_{\kappa_2}{}^K \Leftrightarrow \overline{s}_{\boldsymbol{v}}(\kappa_1) = \overline{s}_{\boldsymbol{v}}(\kappa_2) \quad \forall (v_1, \ldots, v_r) \in \Gamma$$

unter der Voraussetzung $\kappa_1 \sim \kappa_2$ (die anderen Fälle werden analog gezeigt):

Für $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{x})$ und $\omega = (i_1, \ldots, i_u) \in A$ folgt

$$s_{\boldsymbol{v}}(\omega) = \langle \boldsymbol{x}_{i_1} + \cdots + \boldsymbol{x}_{i_u}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \tilde{f}(\varphi_\omega), \boldsymbol{x} \rangle.$$

Daher gilt für $\kappa \in A_k$

$$\overline{s}_{\boldsymbol{v}}(\kappa) = K \langle \tilde{f}(\varphi_\kappa), \boldsymbol{x} \rangle = \langle \tilde{f}({\varphi_\kappa}^K), \boldsymbol{x} \rangle.$$

Somit schließen wir

$$\begin{aligned} \overline{s}_{\boldsymbol{v}}(\kappa_1) = \overline{s}_{\boldsymbol{v}}(\kappa_2) \ \ \forall \boldsymbol{v} \in \Gamma \Leftrightarrow \langle \tilde{f}({\varphi_{\kappa_1}}^K), \boldsymbol{x} \rangle = \langle \tilde{f}({\varphi_{\kappa_2}}^K), \boldsymbol{x} \rangle \ \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^g \\ \Leftrightarrow \tilde{f}({\varphi_{\kappa_1}}^K) = \tilde{f}({\varphi_{\kappa_2}}^K) \Leftrightarrow {\varphi_{\kappa_1}}^K = {\varphi_{\kappa_2}}^K. \end{aligned}$$

Die letzte Äquivalenz beruht auf der Eindeutigkeit der Darstellung in (4.7).

Umgekehrt betrachtet: Bei vorgegebenem K, L, M, k, l, m, $\mathcal{P}$ stellt (4.11) ein homogenes lineares Gleichungssystem für $(v_1, \ldots, v_r)$ dar und die grundsätzliche Vorgangsweise des Beweises von Proposition 4.1 besteht darin, durch eine geeignete Auswahl aus den Gleichungen (4.11) zu zeigen, daß der Lösungsraum dieses Gleichungssystems höchstens eindimensional sein kann.

Definition 4.1. Wir sagen, daß eine Lösung $(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_r)$ von (4.11) ein *zulässiger Vektor* ist, wenn er die Eigenschaften

$$\begin{aligned} &\overline{v}_i < \overline{v}_j \quad 1 \leq i < j \leq r, \\ &\overline{v}_1 \neq 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

erfüllt. Verwenden wir in (4.12) einen festen zulässigen Vektor $\overline{\boldsymbol{v}}$, so können wir weiters definieren (4.13)

$$\omega_1 \prec \omega_2, \quad \text{wenn} \quad \overline{s}_{\overline{\boldsymbol{v}}}(\omega_1) < \overline{s}_{\overline{\boldsymbol{v}}}(\omega_2). \tag{4.13}$$

Dadurch erhält man mit Hilfe eines zulässigen Vektors eine (Prä-)Ordnung auf der Menge der Äquivalenzklassen. Es muß aber nicht unbedingt gelten, daß aus $\overline{s}_{\overline{\boldsymbol{v}}}(\omega_1) = \overline{s}_{\overline{\boldsymbol{v}}}(\omega_2)$ folgt $\omega_1 \sim \omega_2$.

Die Existenz eines zulässigen Vektors hängt von der Anordnung der Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ab, dies wird später erläutert.

Die Ordnungsrelation (4.13) wird mit Hilfe eines festen zulässigen Vektors definiert und alle Ungleichungen zwischen den v_i, die damit zusammenhängen, beziehen sich auf diesen festen zulässigen Vektor. Aussagen, die aus Äquivalenzen $\omega_1 \sim \omega_2$ folgen, beziehen sich aber auf die gesamte Lösungsmenge des Gleichungssystems (4.11) (die ja nicht nur zulässige Vektoren enthält).

Anders formuliert: mit Hilfe der Ordnung (4.13) und der Eigenschaft, daß $\mathcal{P}$ keinen einelementigen Block enthält, lassen sich verschiedenen Struktureigenschaften der Äquivalenzrelation $\mathcal{P}$ ableiten, aus denen wir zu zeigen versuchen, daß der Rang der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (4.11) mindestens $r-1$ sein muß.

Lemma 4.1. *Angenommen $K > 0$, $\kappa_1 = (i_1, \dots, i_k)$, $\kappa_2 = (j_1, \dots, j_k)$ mit $i_1 \le j_1, \dots, i_k \le j_k$. Dann folgt aus $\kappa_1 \ne \kappa_2$, daß $\kappa_1 \prec \kappa_2$ (d.h. $\prec$ verfeinert die koordinatenweise Ordnung auf A_k).*

Der Beweis ist wegen Eigenschaft (4.12) offensichtlich.

Definition 4.2. Unter κ_{Mi} verstehen wir das k-Tupel, welches aus k Einsern besteht. Dafür schreiben wir $(1, \dots, 1)_k$. Wir wollen diese Schreibweise auch im Fall $k = 1$ zulassen. Mit κ_{mi} bezeichnet man jenes k-Tupel, welches aus $k-1$ Einsern und einem Zweier besteht. Wir schreiben $\kappa_{\mathrm{mi}} = (1, \dots, 1, 2)_k$. Um die Schreibweise einfach zu halten, lassen wir sie auch für $k = 1$ zu. Hier bedeutet sie natürlich das 1-Tupel, welches die Zahl 2 enthält. Wir setzen

$$\kappa_{\mathrm{Ma}} = (r, \dots, r)_k, \quad \kappa_{\mathrm{ma}} = (r-1, r, \dots, r)_k.$$

Analog zu oben gilt für $k = 1$

$$\kappa_{\mathrm{Ma}} = (r), \quad \kappa_{\mathrm{ma}} = (r-1).$$

Ebenso definieren wir die l-Tupel λ_{Mi}, λ_{mi}, λ_{Ma}, λ_{ma} und die m-Tupel μ_{Mi}, μ_{mi}, μ_{Ma}, μ_{ma}.

Bemerkung 4.1. Nach dem Lemma 4.1 gilt für $K > 0$

$$\kappa_{\mathrm{Mi}} \prec \kappa_{\mathrm{mi}} \prec \kappa \quad \text{für } \kappa \in A_k \setminus \{\kappa_{\mathrm{Mi}}, \kappa_{\mathrm{mi}}\} \tag{4.14}$$

und

$$\kappa \prec \kappa_{\mathrm{ma}} \prec \kappa_{\mathrm{Ma}} \quad \text{für } \kappa \in A_k \setminus \{\kappa_{\mathrm{Ma}}, \kappa_{\mathrm{ma}}\}. \tag{4.15}$$

Analog folgt: $(1, \dots, 1, i)_k$ ist zu keinem anderen k-Tupel $(i_1, \dots, i_k) \in A_k$ mit $i_k \ge i$ äquivalent. Außerdem ist für $r > 2$ und für $r = 2$, $k > 2$

$$\kappa_{\mathrm{mi}} \prec \kappa_{\mathrm{ma}}.$$

Für $K < 0$ gelten umgekehrte Beziehungen.
Insbesondere sind κ_{Mi}, κ_{mi}, κ_{ma}, κ_{Ma} zu keinem anderen k-Tupel aus A_k äquivalent.

Beweis von Proposition 4.1. In der Darstellung (4.7) sind die Vektoren $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{Z}^g$ paarweise verschieden. Denn nach Voraussetzung sind die Quotienten $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$, $1 \leq i < j \leq r$, keine Einheitswurzeln. Daher beschreiben die Gleichungen

$$\langle \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y} \rangle = 0 \quad i \neq j, \ 1 \leq i,j \leq r \tag{4.16}$$

Hyperebenen im $\mathbb{R}^g$. Wir wählen ein $\boldsymbol{x}$ außerhalb der Vereinigung dieser Hyperebenen und setzen

$$\overline{v}_i = \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x} \rangle \quad 1 \leq i \leq r.$$

Die so definierten Zahlen $\overline{v}_i$ haben die Eigenschaft

$$\overline{v}_i \neq \overline{v}_j, \tag{4.17}$$

wobei $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq r$. Einer Umordnung der Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ entspricht eine Umordnung von $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_r$ und auch eine Transformation von $\mathcal{P}$. Wir können daher immer durch eine geeignete Anordnung von $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ erreichen, daß

$$\overline{v}_i < \overline{v}_j \quad (1 \leq i < j \leq r)$$

gilt. Ist jetzt $\overline{v}_1 = 0$, dann wählen wir in der Definition von $\overline{v}_i$ statt $\boldsymbol{x}$ den Vektor $-\boldsymbol{x}$. Nach entgegengesetzter Anordnung der Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ (d.h. $\alpha_i \to \alpha_{r+1-i}$) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\overline{v}_1 \neq 0, \\ &\overline{v}_i < \overline{v}_j \quad (1 \leq i < j \leq r). \end{aligned}$$

Laut Definition liegt der Vektor $(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_r)$ in Γ (das natürlich ebenfalls durch die Änderung der Reihenfolge transformiert wird). Damit haben wir die Existenz eines zulässigen Vektors bei geeigneter Anordnung von $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ bewiesen.

Nehmen wir nun an, daß $H(\mathcal{P})$ nichttrivial ist, so folgt aus Proposition 4.2 beziehungsweise Proposition 4.3, daß die Lösungsmenge des Gleichungssystems (4.11) Dimension 1 besitzt. Dies widerspricht der Voraussetzung $g > 1$, da ja g der Rang (die Dimension) von Γ ist.

Bemerkung 4.2. Sei $\overline{\boldsymbol{v}} = f(\boldsymbol{x})$ ein zulässiger Vektor mit $\overline{v}_r \neq 0$. Kehrt man die Reihenfolge der α_i um, d.h. ${\alpha_i}^* = \alpha_{r+1-i}$, so folgt wie im letzten Beweis, daß $\overline{\boldsymbol{v}}^* = (-\overline{v}_r, \ldots, -\overline{v}_1)$ einen zulässigen Vektor in Γ^* darstellt. Definiert man nun mittels $\overline{\boldsymbol{v}}^*$ und (4.13) eine Ordnung $\prec^*$ auf $A^* = A$, so entspricht diese genau der entgegengesetzten Ordnung zu α, d.h.

$${\omega_1}^* \prec^* {\omega_2}^* \Leftrightarrow \omega_1 \succ \omega_2.$$

(wobei z.B. für $\kappa = (i_1, \ldots, i_k) \in A_k$, $\kappa^* = (r+1-i_k, \ldots, r+1-i_1)$.) Daher gelten Aussagen, die für die Ordnungsstruktur $\prec$ bewiesen werden (falls eventuelle Zusatzannahmen ebenfalls symmetrisch bezüglich Umkehrung der Reihenfolge sind) auch für die entgegengesetzte Ordnung. Diese Argumentation wird später kurz als „Spiegelung" bezeichnet.

Beispiel. Die Aussage $\kappa_{\mathrm{Mi}} \prec \kappa_{\mathrm{mi}}$ geht durch Spiegelung über in $\kappa_{\mathrm{Ma}} \succ \kappa_{\mathrm{ma}}$.

Proposition 4.2. *Sei $\mathcal{P}$ eine Partition von A, welche keinen einelementigen Block enthält, $(K, L, M) \in H(\mathcal{P}) \setminus \{(0,0,0)\}$ mit $K, L, M \geq 0$. Das System* (4.11) *besitze einen zulässigen Vektor. Dann gibt es Konstanten $a_i \in \mathbb{Q}$ $(i = 2, \ldots, r)$, so daß jede Lösung von* (4.11) *$v_i = a_i \cdot v_1$ erfüllt. Insbesondere ist der Lösungsraum von* (4.11) *eindimensional. Weiters ist $K, L, M > 0$, bis auf den Ausnahmefall* (*nach entsprechender Umordnung*)

$$r = 2, \quad l = 2, \quad m = 1, \quad M = 2L, \quad K = 0,$$
$$v_2 = -v_1 \quad (vgl.\ (4.27)).$$

Beweisidee. Im 1. Teil untersuchen wir die Ordnungsstruktur an den Enden (ähnlich wie in [8]).

Ziel: nach eventueller Vertauschung von (K, L, M) etc. muß (bis auf die Ausnahme (4.27)) gelten

$$\{\lambda_{\mathrm{Mi}}, \mu_{\mathrm{Mi}}\} \prec \{\kappa_{\mathrm{Mi}}, \lambda_{\mathrm{mi}}\} \prec \cdots \tag{4.18}$$

$\{\cdots\}$ bezeichnet eine Äquivalenzklasse von A, d.h. einen Block der Partition $\mathcal{P}$. Die Beziehung (4.18) besagt, daß

$$\bar{s}(\lambda_{\mathrm{Mi}}) = \bar{s}(\mu_{\mathrm{Mi}}) < \bar{s}(\kappa_{\mathrm{Mi}}) = \bar{s}(\lambda_{\mathrm{mi}}) < \cdots$$

(4.18) entspricht folgenden Aussagen:

$$\bar{v}_1 < 0, \tag{4.19}$$

$$0 < kK < lL = mM, \quad L < M, \tag{4.20}$$

$kKv_1 = L((l-1)v_1 + v_2)$ ist eine Gleichung aus dem System (4.11).

Im 2. Teil werden jeweils jene Gleichungen untersucht, wo v_i zum erstenmal auftritt. Diese liefern mittels vollständiger Induktion die behaupteten Aussagen.

Bemerkung 4.3.

(1) Wir verwenden die Aussage „$\mathcal{P}$ enthält keinen einelementigen Block" öfter und führen deswegen die Schreibweise (P) dafür

ein. Statt „τ ist ein Singleton“ sagen wir auch „τ ist isoliert“. „λ_1 ist isoliert in A_l“ soll bedeuten, daß

$$\lambda_1 \not\sim \lambda \quad \forall \lambda \in A_l \setminus \{\lambda_1\}.$$

(2) Für $r \geq 3$ läßt sich weiters zeigen

$$\cdots \prec \{\kappa_{\mathrm{Ma}}, \lambda_{\mathrm{ma}}\} \prec \{\lambda_{\mathrm{Ma}}, \mu_{\mathrm{Ma}}\}, \tag{4.21}$$

das heißt

$$\overline{v}_r > 0, \quad kKv_r = L((l-1)v_r + v_{r-1}).$$

Dies gilt auch für $r = 2$ mit folgenden Ausnahmen (wieder bei geeigneter Vertauschung von K, L, M)

$$K = L, \quad M = \frac{l}{m} L, \quad k = l - 1, \quad m | l, \quad \overline{v}_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\colon \quad & (\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, 2, \ldots)_l \sim (\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, 2, \ldots)_k \quad (i = 0, \ldots, k), \\ & (\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, 2, \ldots)_m \sim (\underbrace{1, \ldots, 1}_{si}, 2, \ldots)_l \quad (i = 0, \ldots, m), \\ & \text{wobei} \quad s = \frac{M}{L} = \frac{l}{m}. \end{aligned}$$

(3) Da $H(\mathcal{P})$ eine Gruppe ist, läßt sich Proposition 4.2 auch anwenden, wenn es $(K, L, M) \in H(\mathcal{P}) \setminus \{(0,0,0)\}$ mit $K, L, M \leq 0$ gibt.

Beweis von Proposition 4.2.

Teil 1

Behauptung. Aus den Voraussetzungen folgt, daß $K, L, M > 0$ sind (bis auf die Ausnahme $r = 2$, $l = 2$, $m = 1$, $M = 2L$, $K = 0$, $\overline{v}_2 = -\overline{v}_1$). Ferner sind genau zwei der drei Zahlen

$$kK, \quad lL, \quad mM$$

gleich. Ordnet man die Zahlen so, daß

$$kK < lL = mM \quad \text{und} \quad L < M$$

gilt, so folgen die Größenbeziehungen (4.18).

Beweis. Zuerst nehmen wir

$$Ll = Mm = Kk \tag{4.22}$$

an. Aus (4.22) folgt

$$K > 0, \quad L > 0, \quad M > 0.$$

Da k, l, m paarweise verschieden sind, impliziert die Relation (4.22), daß auch die Zahlen K, L, M paarweise verschieden sind. Sei etwa

$$L > M > K. \tag{4.23}$$

Die Ungleichung

$$L((l-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_2) > M((m-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_2)$$

läßt sich in der Form

$$Ll\overline{v}_1 + L(\overline{v}_2 - \overline{v}_1) > Mm\overline{v}_1 + M(\overline{v}_2 - \overline{v}_1)$$

schreiben. Wegen $Ll = Mm$ und $\overline{v}_1 < \overline{v}_2$ ist dies gleichbedeutend mit

$$L > M.$$

Daher ist (4.23) äquivalent zu

$$L((l-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_2) > M((m-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_2) > K((k-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_2).$$

Wegen (4.22) folgt daraus

$$\overline{s}(\lambda_{\mathrm{Mi}}) = \overline{s}(\mu_{\mathrm{Mi}}) = \overline{s}(\kappa_{\mathrm{Mi}}) < \overline{s}(\kappa_{\mathrm{mi}}) < \overline{s}(\mu_{\mathrm{mi}}) < \overline{s}(\lambda_{\mathrm{mi}}).$$

Mit Hilfe von Bemerkung 4.1 schließen wir, daß κ_{mi} ein Singleton ist. Die Relation (4.22) ist also unmöglich.

Wir können wegen $\overline{v}_1 \neq 0$ o.B.d.A. von

$$Ll\overline{v}_1 \leq Mm\overline{v}_1 \leq Kk\overline{v}_1 \tag{4.24}$$

ausgehen, wobei nicht beide Gleichheitszeichen auftreten können.

Wir nehmen zunächst

$$\overline{v}_1 > 0$$

an. Dann ist auch

$$\overline{v}_r > 0.$$

Die Relation (4.24) und $\overline{v}_1 > 0$ ergeben $K > 0$ (sonst wäre $L = M = 0$). Daraus folgt

$$Kk\overline{v}_1 < Kk\overline{v}_r.$$

Weiters erhalten wir aus (4.24) und $\overline{v}_r > 0$

$$Ll\overline{v}_r \leq Mm\overline{v}_r \leq Kk\overline{v}_r.$$

Wegen (P) und (4.15) muß

$$Mm\overline{v}_r = Kk\overline{v}_r$$

gelten (sonst wäre κ_{Ma} isoliert), daher ist

$$Mm = Kk.$$

Weil $m \neq k$ vorausgesetzt ist, haben wir

$$M \neq K.$$

Wir wählen o.B.d.A.

$$M < K.$$

Da nicht alle Zahlen in (4.24) gleich sind, gilt

$$Ll < Mm.$$

Wegen der Annahme $\overline{v}_1 > 0$ ist

$$Ll\overline{v}_1 < Mm\overline{v}_1 = Kk\overline{v}_1. \tag{4.25}$$

Aus (P), (4.25) und Bemerkung 4.1 schließen wir

$$L = 0$$

(sonst wäre λ_{Mi} isoliert). Also ist

$$\overline{s}(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in A_l.$$

Wegen $Ll\overline{v}_1 \leq Mm\overline{v}_1 \neq 0$ haben wir

$$\lambda \not\sim \mu \quad \forall \lambda \in A_l, \quad \forall \mu \in A_m.$$

Wie vorhin erhalten wir aus $M < K$, $Mm = Kk$ die Ungleichung

$$\overline{s}(\mu_{\mathrm{mi}}) < \overline{s}(\kappa_{\mathrm{mi}}).$$

Es gelten die Beziehungen

$$\mu_{\mathrm{Mi}} \sim \kappa_{\mathrm{Mi}} \prec \mu_{\mathrm{mi}} \prec \kappa_{\mathrm{mi}}.$$

Damit wäre μ_{mi} isoliert. Die Annahme $\overline{v}_1 > 0$ führt also auf einen Widerspruch.

Daher muß

$$\overline{v}_1 < 0$$

sein. Dann impliziert (4.24)

$$Kk \leq Mm \leq Ll.$$

Daraus folgt

$$L > 0$$

(sonst wäre $M = K = 0$). Weiters haben wir

$$Ll = Mm,$$

andernfalls wäre λ_{Mi} isoliert. Aus $l \neq m$ folgt $L \neq M$. Sei o.B.d.A.

$$L < M.$$

Dann ist

$$l > m \geq 1$$

und

$$Kk < Ll = Mm.$$

Wegen

$$Mm\overline{v}_1 = Ll\overline{v}_1 < L((l-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_2) < M((m-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_2)$$

muß $\lambda_{\mathrm{mi}} \sim \kappa$ gelten für ein $\kappa \in A_k$.

Falls

$$K > 0$$

folgt aus Bemerkung 4.1 und

$$\overline{s}(\lambda_{\mathrm{Mi}}) = \overline{s}(\mu_{\mathrm{Mi}}) < \overline{s}(\kappa_{\mathrm{Mi}}),$$

daß

$$\lambda_{\mathrm{mi}} \sim \kappa_{\mathrm{Mi}}$$

gelten muß. Damit sind dann alle Aussagen (4.18)–(4.20) erfüllt.

Angenommen

$$K = 0.$$

Dann ist

$$\overline{s}(\lambda_{\mathrm{mi}}) = L((l-1)v_1 + v_2) = \overline{s}(\kappa_{\mathrm{Mi}}) = 0$$

für jede Lösung $\boldsymbol{v}$ von (4.11). Es folgt

$$v_2 = -(l-1)v_1. \tag{4.26}$$

Für

$$r = 2, \quad l > 2 \quad \text{oder} \quad r > 2$$

ist nach Bemerkung 4.1

$$\lambda_{\mathrm{mi}} \prec \lambda_{\mathrm{ma}}.$$

Das heißt,

$$0 = \overline{s}(\lambda_{\mathrm{mi}}) < \overline{s}(\lambda_{\mathrm{ma}}).$$

Wir haben also

$$\lambda_{\mathrm{ma}} \not\sim \kappa \quad \forall \kappa \in A_k$$

und

$$\overline{s}(\mu_{\mathrm{ma}}) < \overline{s}(\lambda_{\mathrm{ma}}) < \overline{s}(\lambda_{\mathrm{Ma}}) = \overline{s}(\mu_{\mathrm{Ma}}).$$

Die erste Ungleichung gilt wegen der Äquivalenz

$$L((l-1)\overline{v}_r + \overline{v}_{r-1}) > M((m-1)\overline{v}_r + \overline{v}_{r-1})$$
$$\Leftrightarrow$$
$$L < M.$$

Daher ist, im Widerspruch zur Voraussetzung (P), λ_{ma} ein Singleton.

Weil aus $L < M$ folgt $l > m \geq 1$, bleibt nur

$$r = 2, \quad l = 2, \quad m = 1, \quad M = 2L, \quad K = 0. \tag{4.27}$$

Wegen (4.26) ist $v_2 = -v_1$, daher ist der Lösungsraum des Gleichungssystems (4.11) auch in diesem Fall eindimensional. Die Partition $\mathcal{P}$ erfüllt die Äquivalenzen

$$\lambda_{\mathrm{Mi}} \sim \mu_{\mathrm{Mi}}, \quad \lambda_{\mathrm{Ma}} \sim \mu_{\mathrm{Ma}}, \quad \lambda_{\mathrm{mi}} \sim \kappa \quad \text{für ein } \kappa \in A_k.$$

In diesem Fall ist $A_m = \{\mu_{\mathrm{Mi}}, \mu_{\mathrm{Ma}}\}$, $A_l = \{\lambda_{\mathrm{Mi}}, \lambda_{\mathrm{mi}}, \lambda_{\mathrm{Ma}}\}$. Innerhalb von A_k kann die Partition $\mathcal{P}$ beliebig festgelegt werden.

Bis auf diese Ausnahme ist

$$K, L, M > 0.$$

Damit ist der erste Teil von Proposition 4.2 gezeigt.

(4.20) führt zu den Gleichungen

$$(Kk - Ll)v_1 = L(v_2 - v_1), \quad v_2 = \left(\frac{K}{L}k - l + 1\right)v_1. \tag{4.28}$$

Die Aussage (4.21) kann für $r \geq 3$ durch eine der Gleichungen

$$(Kk - Ll)v_r = L(v_{r-1} - v_r), \quad v_{r-1} = \left(\frac{K}{L}k - l + 1\right)v_r \tag{4.29}$$

ausgedrückt werden.

Aus (4.28) ersehen wir, daß v_2 eine Darstellung der Form $a_2 v_1$ besitzt, wobei a_2 nur von der Partition $\mathcal{P}$ und den Elementen $(K, L, M) \in H(\mathcal{P})$ abhängt. Weiters hängt a_2 nicht von der Lösung $(v_1, \ldots, v_r)$ des Systems (4.11) ab. Diese Tatsache wird im 2. Teil des Beweises von Proposition (4.2) verallgemeinert.

Teil 2

Behauptung. Es gibt Konstanten $a_i \in \mathbb{Q}$ $(2 \leq i \leq r)$, welche nur von der Partition $\mathcal{P}$ und $(K, L, M) \in H(\mathcal{P})$ abhängen, so daß jede Lösung $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_r)$ von (4.11) $v_i = a_i \cdot v_1$ erfüllt.

Beweis. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion nach i und betrachten dabei jene Gleichungen, in denen v_i zum

„erstenmal“ auftritt (im Sinne von $\prec$). Wie im 1. Teil sei $\overline{\boldsymbol{v}} = (\overline{v}_i)$ ein zulässiger Vektor (der eine Lösung von (4.11) darstellt). $\overline{s}$ steht immer für $\overline{s}_{\overline{\boldsymbol{v}}}$.

Für $i = 2$ gilt die Behauptung nach (4.28).

Sei die Behauptung für $2 \leq j \leq i - 1 < r$ bewiesen. Wir untersuchen die Gleichungen, welche durch die Äquivalenz von $(1, \ldots, 1, i)_l$ zu anderen Elementen von A gebildet werden.

(1) $(1, \ldots, 1, i)_l \sim \lambda,\ \lambda = (i_1, \ldots, i_l) \in A_l,\ \lambda \neq (1, \ldots, 1, i)_l$.
Nach Bemerkung 4.1 gilt $i_l < i$. Wir haben für jede Lösung $\boldsymbol{v}$ von (4.11)

$$L((l-1)v_1 + v_i) = L(v_{i_1} + \cdots + v_{i_l}).$$

Daraus berechnet sich v_i durch

$$v_i = s_{\boldsymbol{v}}(\lambda) - (l-1)v_1.$$

Wegen $i_l < i$ können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden und sehen, daß v_i die gesuchte Form hat.

(2) $(1, \ldots, 1, i)_l \sim \kappa,\ \kappa = (i_1, \ldots, i_k) \in A_k$.
Das bedeutet

$$L((l-1)v_1 + v_i) = K(v_{i_1} + \ldots + v_{i_k}).$$

Wir erhalten

$$v_i = \frac{K}{L}(v_{i_1} + \ldots + v_{i_k}) - (l-1)v_1.$$

Wenn $i_k < i$, dann läßt sich die Induktionsvoraussetzung anwenden, und wir sind bereits fertig. Sei $i_k \geq i$. Wir betrachten das k-Tupel $(1, \ldots, 1, i)_k$.

(2a) $(1, \ldots, 1, i)_k \sim \kappa_0 \in A_k,\ \kappa_0 \neq (1, \ldots, 1, i)_k$.
Dieser Fall wird wie in Punkt (1) behandelt.

(2b) $(1, \ldots, 1, i)_k \sim \lambda_0 \in A_l$
Angenommen $\lambda_0 = (1, \ldots, 1, i)_l$. Dann gilt

$$K((k-1)v_1 + v_i) = L((l-1)v_1 + v_i).$$

Es folgt

$$(K - L)v_i = (L(l-1) - K(k-1))v_1.$$

Falls $K = L$ wäre, dann müßte auch gelten

$$0 = (L(l-1) - K(k-1))\overline{v}_1.$$

Daher wäre, wegen $\overline{v}_1 \neq 0$,

$$K(k-1) = L(l-1).$$

Weil $K = L$, so hätten wir einen Widerspruch zur Voraussetzung $k \neq l$. Es ist also $v_i = a_i \cdot v_1$, da $K \neq L$, wobei a_i nur von der Partition $\mathcal{P}$ und dem Tripel $(K, L, M) \in H(\mathcal{P})$ abhängt.

Sei jetzt $\lambda_0 \not\sim (1, \ldots, 1, i)_l$, $\lambda_0 = (j_1, \ldots, j_l) \in A_l$. Mittels Lemma 4.1 folgt aus $i \leq i_k$, daß

$$(1, \ldots, 1, i)_k \prec \kappa$$

und weiter

$$\overline{s}((j_1, \ldots, j_l)_l) = \overline{s}((1, \ldots, 1, i)_k) < \overline{s}(\kappa) = \overline{s}((1, \ldots, 1, i)_l).$$

Wir erhalten (wieder aus Lemma 4.1) $j_l < i$. v_i hat die Darstellung

$$v_i = \frac{1}{K}\overline{s}_{\boldsymbol{v}}(\lambda_0) - (k-1)v_1.$$

Dies errechnen wir aus der Gleichung $\overline{s}_{\boldsymbol{v}}(\lambda_0) = \overline{s}_{\boldsymbol{v}}((1, \ldots, 1, i)_k)$. Wir können wegen $j_l < i$ die Induktionsvoraussetzung anwenden und haben damit gezeigt, daß v_i die gewünschte Gestalt hat.

(2c) $(1, \ldots, 1, i)_k \sim \mu_0,\ \mu_0 = (j_1, \ldots, j_m) \in A_m$
Hier gilt wegen $L < M$, $Ll = Mm$

$$\overline{s}(\mu_0) = \overline{s}((1, \ldots, 1, i)_k) \leq \overline{s}(\kappa) = \overline{s}((1, \ldots, 1, i)_l) < \overline{s}((1, \ldots, 1, i)_m).$$

Es folgt $j_m < i$. Die Äquivalenz (2.c) ergibt

$$v_i = \frac{1}{K}\overline{s}_{\boldsymbol{v}}(\mu_0) - (k-1)v_1.$$

Wegen $j_m < i$ hat v_i die gesuchte Form.

(3) $(1, \ldots, 1, i)_l \sim \mu,\ \mu = (i_1, \ldots, i_m) \in A_m$.
Aus $L < M$ und $Ll = Mm$ schließen wir

$$\overline{s}(\mu) = \overline{s}((1, \ldots, 1, i)_l) < \overline{s}((1, \ldots, 1, i)_m).$$

Es muß daher $i_m < i$ sein. Wir haben

$$v_i = \frac{1}{L}\overline{s}_{\boldsymbol{v}}(\mu) - (l-1)v_1.$$

Laut Induktionsannahme hat v_i die gewünschte Form. □

Proposition 4.3. *Sei $\mathcal{P}$ eine Partition von A, welche keinen einelementigen Block enthält. Sei $(K, L, M) \in H(\mathcal{P}) \setminus \{(0, 0, 0)\}$, wobei zwei der Zahlen K, L, M verschiedene Vorzeichen haben.*

Das Gleichungssystem (4.11) *besitze einen zulässigen Vektor. Dann ist der Lösungsraum von* (4.11) *eindimensional. Weiters gilt*

$$K \cdot L \cdot M \neq 0,$$

bis auf die Ausnahme (*bei geeigneter Vertauschung von* K, L, M)

$$r=2,\ \ l=1,\ \ k=2,\ \ L=-2K,\ \ M=0,\ \ v_2=-v_1\ (vgl.\ (4.46)).$$

Beweisidee. Teil I besteht wieder aus der Analyse der Ordnungsstruktur an den Enden. Ziel: nach eventueller Vertauschung von K, L, M (in allen Fällen wird $K < 0$, $L > 0$, $M > 0$ angenommen) erhalten wir bis auf (4.46) eine der Möglichkeiten

$$\{\lambda_{\mathrm{Mi}},\kappa_{\mathrm{Ma}}\} \prec \{\mu_{\mathrm{Mi}},\kappa_{\mathrm{ma}}\} \prec \cdots \prec \{\mu_{\mathrm{Ma}},\kappa_{\mathrm{mi}}\} \prec \{\lambda_{\mathrm{Ma}},\kappa_{\mathrm{Mi}}\}, \tag{4.30}$$

$$\{\lambda_{\mathrm{Mi}},\kappa_{\mathrm{Ma}}\} \prec \{\mu_{\mathrm{Mi}},\lambda_{\mathrm{mi}}\} \prec \cdots \prec \{\mu_{\mathrm{Ma}},\lambda_{\mathrm{ma}}\} \prec \{\lambda_{\mathrm{Ma}},\kappa_{\mathrm{Mi}}\}, \tag{4.31}$$

$$\{\lambda_{\mathrm{Mi}},\mu_{\mathrm{Mi}}\} \prec \{\kappa_{\mathrm{Ma}},\lambda_{\mathrm{mi}}\} \prec \cdots \prec \{\kappa_{\mathrm{Mi}},\lambda_{\mathrm{ma}}\} \prec \{\lambda_{\mathrm{Ma}},\mu_{\mathrm{Ma}}\}, \tag{4.32}$$

$$\{\lambda_{\mathrm{Mi}},\mu_{\mathrm{Mi}},\kappa_{\mathrm{Ma}}\} \prec \{\lambda_{\mathrm{mi}},\kappa_{\mathrm{ma}}\} \prec \cdots \prec \{\lambda_{\mathrm{ma}},\kappa_{\mathrm{Mi}}\} \prec \{\lambda_{\mathrm{Ma}},\mu_{\mathrm{Ma}}\}, \tag{4.33}$$

$$\{\lambda_{\mathrm{Mi}},\mu_{\mathrm{Mi}}\} \prec \{\kappa_{\mathrm{Ma}},\lambda_{\mathrm{mi}}\} \prec \cdots \prec \{\kappa_{\mathrm{mi}},\lambda_{\mathrm{ma}}\} \prec \{\lambda_{\mathrm{Ma}},\mu_{\mathrm{Ma}},\kappa_{\mathrm{Mi}}\}. \tag{4.34}$$

(4.34) ist eine Spiegelung von (4.33). Die Beziehungen (4.30) bis (4.34) erfüllen

$$\overline{v}_1 < 0, \quad \overline{v}_r > 0. \tag{4.35}$$

(4.30) entspricht folgenden Aussagen

$$\begin{gathered} \overline{v}_1 = -\overline{v}_r, \\ Kk < Mm < Ll, \quad Kk = -Ll, \quad L > -K; \\ Mmv_1 = K((k-1)v_r + v_{r-1}), \quad Mmv_r = K((k-1)v_1 + v_2), \\ Llv_1 = Kkv_r,\ \ Llv_r = Kkv_1 \ \ \text{sind Gleichungen aus dem System (4.11).} \end{gathered} \tag{4.36}$$

(4.31) entspricht den Aussagen

$$\begin{gathered} \overline{v}_1 = -\overline{v}_r, \\ Kk < Mm < Ll, \quad Kk = -Ll, \quad L < -K; \\ Mmv_1 = L((l-1)v_1 + v_2), \quad Mmv_r = L((l-1)v_r + v_{r-1}) \\ Llv_1 = Kkv_r, \quad Llv_r = Kkv_1 \quad \text{sind Gleichungen aus dem System (4.11).} \end{gathered} \tag{4.37}$$

Aus (4.32) folgt

$$Ll = Mm, \quad L < M;$$

$$Kkv_r = L((l-1)v_1 + v_2) \quad \text{und}$$

$$Kkv_1 = L((l-1)v_r + v_{r-1}) \quad \text{sind Gleichungen aus dem System (4.11).} \tag{4.38}$$

Aus (4.33) folgt

$$Ll = Mm, \quad L < M, \quad Kk \neq -Ll;$$

$$L((l-1)v_1 + v_2) = K((k-1)v_r + v_{r-1}), \quad L((l-1)v_r + v_{r-1}) = Kkv_1,$$

$$Llv_1 = Mmv_1 = Kkv_r \quad \text{sind Gleichungen aus dem System (4.11).} \tag{4.39}$$

Aus (4.34) folgt

$$Ll = Mm, \quad L < M;$$

$$Kkv_r = L((l-1)v_1 + v_2), K((k-1)v_1 + v_2) = L((l-1)v_r + v_{r-1}),$$

$$Llv_r = Mmv_r = Kkv_1 \quad \text{sind Gleichungen aus dem System (4.11).} \tag{4.40}$$

In Teil II zeigen wir, daß der Lösungsraum von (4.11) höchstens eindimensional sein kann.

In Abschnitt III werden wir zeigen, daß (4.33) nur im Ausnahmefall

$$r = 2, \quad k = l-1, \quad m|l, \quad K = -1, \quad L = 1, \quad M = \frac{l}{m} \text{ (vgl. (4.80))}$$

auftritt.

Beweis von Proposition 4.3.

Teil I. Wir können davon ausgehen, daß genau zwei der Zahlen K, L, M nichtnegativ sind. Sei etwa

$$K < 0, \quad L > 0, \quad M \geq 0,$$

$$(Kk <) Mm \leq Ll.$$

Das führt zu den Möglichkeiten

$$Ll = Mm, \tag{4.41}$$

$$Mm < Ll. \tag{4.42}$$

(**A**) Wir setzen zunächst

$$Mm < Ll$$

voraus und wollen als erstes zeigen, daß daraus folgt

(**Aa**) $$\overline{v}_1 < 0, \quad \overline{v}_r = -\overline{v}_1, \quad Kk = -Ll.$$

Es gilt sogar $v_r = -v_1$ für eine beliebige Lösung $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_r)$. Wegen $K < 0$ ist

$$Kk\overline{v}_r < Kk\overline{v}_1,$$

wobei $(\overline{v}_i)$ ein zulässiger Vektor ist. Aus der Annahme $\overline{v}_1 > 0$ folgt mittels (4.42) die Ungleichung $Mm\overline{v}_1 < Ll\overline{v}_1$. Eigenschaft (P) bewirkt $Kk\overline{v}_r = Mm\overline{v}_1 \geq 0$, im Widerspruch dazu ist $Kk\overline{v}_r < Kk\overline{v}_1 < 0$. Es muß also

$$\overline{v}_1 < 0$$

sein. (4.42) führt zu der Ungleichung

$$Ll\overline{v}_1 < Mm\overline{v}_1.$$

Mit Hilfe von (P) schließen wir daraus

$$Kk\overline{v}_r = Ll\overline{v}_1. \tag{4.43}$$

Da $\overline{v}_1 < 0$, folgt aus (4.43)

$$\overline{v}_r > 0.$$

Wegen $\overline{v}_r > 0$, $Mm < Ll$ ist $Mm\overline{v}_r < Ll\overline{v}_r$ und daher

$$Kk\overline{v}_1 = Ll\overline{v}_r.$$

Daraus folgt

$$Kk\overline{v}_1{}^2 = Ll\overline{v}_r\overline{v}_1 = Kk\overline{v}_r{}^2,$$

das heißt

$$\overline{v}_1{}^2 = \overline{v}_r{}^2$$

und damit

$$\overline{v}_1 = -\overline{v}_r, \quad Kk = -Ll.$$

Wegen $k \neq l$ muß

$$K \neq -L$$

sein. Die Ungleichung

$$Mm < Ll$$

liefert also

$$\kappa_{\mathrm{Ma}} \sim \lambda_{\mathrm{Mi}}, \quad \kappa_{\mathrm{Mi}} \sim \lambda_{\mathrm{Ma}}.$$

(**Ab**) Im nächsten Schritt zeigen wir, daß aus

$$L > -K$$

folgt

$$\overline{s}(\mu_{\mathrm{Mi}}) = \overline{s}(\kappa_{\mathrm{ma}}), \quad \overline{s}(\mu_{\mathrm{Ma}}) = \overline{s}(\kappa_{\mathrm{mi}}),$$

und daß insbesondere für $M > 0$ die Beziehung (4.30) gilt.

Da die Situation bis jetzt symmetrisch ist, können wir (eventuell durch Spiegelung) annehmen, daß

$$\overline{v}_r - \overline{v}_{r-1} \leq \overline{v}_2 - \overline{v}_1.$$

Dann folgt (zusammen mit $Kk = -Ll$, $\overline{v}_r = -\overline{v}_1$, $-K < L$):

$$\overline{s}(\kappa_{\mathrm{ma}}) = Kk\overline{v}_r + K(\overline{v}_{r-1} - \overline{v}_r) < Ll\overline{v}_1 + L(\overline{v}_2 - \overline{v}_1) = \overline{s}(\lambda_{\mathrm{mi}}).$$

Wegen (P) und Bemerkung (4.1) gilt daher

$$\kappa_{\mathrm{ma}} \sim \mu \quad \text{für ein } \mu \in A_m.$$

Ist $M > 0$, so muß $\mu = \mu_{\mathrm{Mi}}$ sein, da wegen (4.42) $\lambda_{\mathrm{Mi}} \prec \mu_{\mathrm{Mi}}$ ist, d.h. für $M > 0$ gilt

$$\kappa_{\mathrm{ma}} \sim \mu_{\mathrm{Mi}}.$$

Für $M = 0$ haben wir zumindest

$$\overline{s}(\mu_{\mathrm{Mi}}) = 0 = \overline{s}(\mu) = \overline{s}(\kappa_{\mathrm{ma}}).$$

Das liefert in beiden Fällen

$$\overline{s}(\kappa_{\mathrm{ma}}) - \overline{s}(\kappa_{\mathrm{Ma}}) = \overline{s}(\mu_{\mathrm{Mi}}) - \overline{s}(\lambda_{\mathrm{Mi}}),$$

also

$$K(\overline{v}_{r-1} - \overline{v}_r) = (Mm - Ll)\overline{v}_1. \tag{4.44}$$

Aus der Annahme

$$\overline{v}_r - \overline{v}_{r-1} < \overline{v}_2 - \overline{v}_1$$

folgt mittels $Kk = -Ll$ und (4.44)

$$\begin{aligned}\overline{s}(\kappa_{\mathrm{mi}}) &= Kk\overline{v}_1 + K(\overline{v}_2 - \overline{v}_1) < -Ll\overline{v}_1 + K(\overline{v}_r - \overline{v}_{r-1}) = \\ &= -Ll\overline{v}_1 + (Ll - Mm)\overline{v}_1 = -Mm\overline{v}_1 = Mm\overline{v}_r = \overline{s}(\mu_{\mathrm{Ma}}),\end{aligned}$$

das bedeutet

$$\kappa_{\mathrm{mi}} \prec \mu_{\mathrm{Ma}}.$$

Insbesondere muß

$$M > 0$$

sein, da

$$\overline{s}(\mu) = \overline{s}(\kappa_{\text{ma}}) \leq \overline{s}(\kappa_{\text{mi}}) < \overline{s}(\mu_{\text{Ma}}).$$

Aus (P) und Bemerkung 4.1 folgt

$$\mu_{\text{Ma}} \sim \lambda_{\text{ma}}.$$

Das liefert wie oben

$$(Mm - Ll)\overline{v}_r = L(\overline{v}_{r-1} - \overline{v}_r).$$

Wegen $\overline{v}_r = -\overline{v}_1$ ergibt dies in Kombination mit (4.44)

$$L = -K,$$

also einen Widerspruch.

Daher muß

$$\overline{v}_r - \overline{v}_{r-1} = \overline{v}_2 - \overline{v}_1$$

sein, das heißt

$$\overline{v}_2 = -\overline{v}_{r-1}.$$

Weil

$$\overline{v}_r = -\overline{v}_1, \quad \overline{v}_2 = -\overline{v}_{r-1}, \quad \mu_{\text{Mi}} \sim \kappa_{\text{ma}}$$

ist, folgt

$$\overline{s}(\mu_{\text{Ma}}) = -\overline{s}(\mu_{\text{Mi}}) = -\overline{s}(\kappa_{\text{ma}}) = \overline{s}(\kappa_{\text{mi}}). \tag{4.45}$$

Für $M > 0$ ist μ_{Ma} isoliert in A_m, und da (wegen $L > -K$, $Ll = -Kk$, $\overline{v}_r = -\overline{v}_1$, $\overline{v}_r - \overline{v}_{r-1} = \overline{v}_2 - \overline{v}_1$),

$$\overline{s}(\lambda_{\text{ma}}) < \overline{s}(\kappa_{\text{mi}})$$

ist, folgt

$$\mu_{\text{Ma}} \sim \kappa_{\text{mi}}.$$

(Ab′) Als nächstes zum Fall

$$M = 0$$

(die Annahme $L > -K$ gilt weiter). Aus

$$0 = \overline{s}(\kappa_{\text{ma}}) = \overline{s}(\kappa_{\text{mi}}) \quad \text{(siehe (4.45))}$$

folgt nach Bemerkung 4.1

$$r = k = 2,$$

weiters muß wegen

$$Ll = -Kk, \quad L > -K$$

gelten

$$l = 1, \quad L = -2K.$$

Wir erhalten den Ausnahmefall

$$r = 2, \quad l = 1, \quad k = 2, \quad L = -2K, \quad M = 0, \quad v_2 = -v_1,$$
$$\mathcal{P}\colon\ \lambda_{\mathrm{Mi}} \sim \kappa_{\mathrm{Ma}}, \quad \lambda_{\mathrm{Ma}} \sim \kappa_{\mathrm{Mi}}, \quad \kappa_{\mathrm{mi}} \sim \mu \quad \text{für ein } \mu \in A_m. \qquad (4.46)$$

In diesem Fall ist $A_l = \{\lambda_{\mathrm{Mi}}, \lambda_{\mathrm{Ma}}\}$, $A_k = \{\kappa_{\mathrm{Mi}}, \kappa_{\mathrm{mi}}, \kappa_{\mathrm{Ma}}\}$, $\kappa_{\mathrm{mi}} = \kappa_{\mathrm{ma}}$. Innerhalb von A_m kann die Partition $\mathcal{P}$ beliebig festgelegt werden.

(Ac) Zuletzt untersuchen wir den Fall

$$L < -K.$$

Der Fall $M = 0$ läßt sich durch die Vertauschungen $k \leftrightarrow l$, $K \mapsto -L$, $L \mapsto -K$ auf (Ab′) zurückführen. Für $M > 0$ zeigen wir

$$\mu_{\mathrm{Mi}} \sim \lambda_{\mathrm{mi}}, \quad \mu_{\mathrm{Ma}} \sim \lambda_{\mathrm{ma}},$$

das ist Beziehung (4.31). Die Rechnungen verlaufen analog zum vorhergehenden Fall. Wir können o.B.d.A.

$$\overline{v}_2 - \overline{v}_1 \le \overline{v}_r - \overline{v}_{r-1}$$

voraussetzen. Dann folgt

$$\overline{s}(\lambda_{\mathrm{mi}}) < \overline{s}(\kappa_{\mathrm{ma}})$$

und weiter

$$\lambda_{\mathrm{mi}} \sim \mu \quad \text{für ein } \mu \in A_m.$$

Für $M > 0$ ist wegen Bemerkung 4.1 $\mu = \mu_{\mathrm{Mi}}$, d.h.

$$\lambda_{\mathrm{mi}} \sim \mu_{\mathrm{Mi}}.$$

Das liefert

$$\overline{s}(\lambda_{\mathrm{mi}}) - \overline{s}(\lambda_{\mathrm{Mi}}) = \overline{s}(\mu_{\mathrm{Mi}}) - \overline{s}(\kappa_{\mathrm{Ma}}),$$

also

$$L(\overline{v}_2 - \overline{v}_1) = (Mm - Ll)\overline{v}_1. \qquad (4.47)$$

Aus der Annahme

$$\overline{v}_2 - \overline{v}_1 < \overline{v}_r - \overline{v}_{r-1}$$

würden wir mittels (4.47)

$$\overline{s}(\lambda_{\mathrm{ma}}) < \overline{s}(\mu_{\mathrm{Ma}})$$

erhalten. Dann gälte $\mu_{\text{Ma}} \sim \kappa_{\text{mi}}$, also

$$(Mm - Ll)\overline{v}_r = K(\overline{v}_2 - \overline{v}_1).$$

Dies führte zu $K = -L$, ein Widerspruch zu $L < -K$. Es folgt

$$\overline{v}_2 = -\overline{v}_{r-1}$$

und damit

$$\mu_{\text{Ma}} \sim \lambda_{\text{ma}}.$$

(B) Wir betrachten nun

$$Ll = Mm.$$

Dann ist auch

$$M > 0.$$

Wegen $l \neq m$ ist $L \neq M$. Wir können o.B.d.A.

$$L < M$$

annehmen. Hier gilt

$$Ll\overline{v}_1 = Mm\overline{v}_1,$$
$$Ll\overline{v}_r = Mm\overline{v}_r.$$

Aus Eigenschaft (P) folgt

$$Kk\overline{v}_r \geq Ll\overline{v}_1 = Mm\overline{v}_1, \quad Kk\overline{v}_1 \leq Ll\overline{v}_r = Mm\overline{v}_r.$$

Wegen

$$L < M, \quad Ll = Mm$$

haben wir

$$L((l-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_2) < M((m-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_2), \quad \text{d.h. } \lambda_{\text{mi}} \prec \mu_{\text{mi}},$$
$$L((l-1)\overline{v}_r + \overline{v}_{r-1}) > M((m-1)\overline{v}_r + \overline{v}_{r-1}), \quad \text{d.h. } \lambda_{\text{ma}} \succ \mu_{\text{ma}}.$$

Mittels (P) erhalten wir

$$\lambda_{\text{mi}} \sim \kappa, \quad \lambda_{\text{ma}} \sim \kappa' \quad \text{für } \kappa, \kappa' \in A_k.$$

(Ba) Wir untersuchen zuerst

$$Kk\overline{v}_r = Ll\overline{v}_1 = Mm\overline{v}_1.$$

Daraus ergibt sich (wegen $\lambda_{\text{mi}} \prec \mu_{\text{mi}}$)

$$\kappa = \kappa_{\text{ma}}.$$

Also ist

$$\kappa_{\mathrm{ma}} \sim \lambda_{\mathrm{mi}}.$$

(P) impliziert

$$\kappa_{\mathrm{Ma}} \sim \lambda_{\mathrm{Mi}} \sim \mu_{\mathrm{Mi}}.$$

Wir zeigen

$$\kappa_{\mathrm{Mi}} \prec \lambda_{\mathrm{Ma}}.$$

Andernfalls wäre

$$Kk\overline{v}_1 = Ll\overline{v}_r.$$

Dies liefert $\kappa' = \kappa_{\mathrm{mi}}$ (wegen $\lambda_{\mathrm{ma}} \succ \mu_{\mathrm{ma}}$) und $Kk = -Ll$. Also ist

$$\lambda_{\mathrm{ma}} \sim \kappa_{\mathrm{mi}}.$$

Die Gleichung

$$\overline{s}(\kappa_{\mathrm{mi}}) = \overline{s}(\lambda_{\mathrm{ma}})$$

reduziert sich wegen $Kk\overline{v}_1 = Ll\overline{v}_r$ zu

$$K(\overline{v}_2 - \overline{v}_1) = L(\overline{v}_{r-1} - \overline{v}_r).$$

Analog folgt aus

$$\kappa_{\mathrm{ma}} \sim \lambda_{\mathrm{mi}}$$

mittels $Kk\overline{v}_r = Ll\overline{v}_1$ die Relation

$$K(\overline{v}_{r-1} - \overline{v}_r) = L(\overline{v}_2 - \overline{v}_1).$$

Addieren wir die letzten beiden Gleichungen, dann erhalten wir

$$(K+L)(\overline{v}_{r-1} - \overline{v}_r) = (K+L)(\overline{v}_2 - \overline{v}_1).$$

Da $\overline{v}_1 < \overline{v}_2$, $\overline{v}_{r-1} < \overline{v}_r$ kann nur $K + L = 0$ sein. Unter Verwendung der Identität $Kk = -Ll$ ergibt sich $k = l$, ein Widerspruch.

Für $\kappa_{\mathrm{Ma}} \sim \lambda_{\mathrm{Mi}} \sim \mu_{\mathrm{Mi}}$ gilt also

$$\kappa_{\mathrm{Mi}} \prec \lambda_{\mathrm{Ma}},$$

das bedeutet (wegen $\lambda_{\mathrm{ma}} \succ \mu_{\mathrm{ma}}$) $\kappa' = \kappa_{\mathrm{Mi}}$, also

$$\lambda_{\mathrm{ma}} \sim \kappa_{\mathrm{Mi}}.$$

Insgesamt führen die Relationen

$$Kk < Ll = Mm, \quad Kk\overline{v}_r = Ll\overline{v}_1 = Mm\overline{v}_1$$

zu Partitionen der Form

$$\{\lambda_{\mathrm{Mi}}, \mu_{\mathrm{Mi}}, \kappa_{\mathrm{Ma}}\} \prec \cdots \prec \{\lambda_{\mathrm{Ma}}, \mu_{\mathrm{Ma}}\}.$$

Aus der Annahme $L < M$ folgt

$$\{\lambda_{\mathrm{Mi}}, \mu_{\mathrm{Mi}}, \kappa_{\mathrm{Ma}}\} \prec \{\kappa_{\mathrm{Ma}}, \lambda_{\mathrm{mi}}\} \prec \cdots \prec \{\kappa_{\mathrm{Mi}}, \lambda_{\mathrm{ma}}\} \prec \{\lambda_{\mathrm{Ma}}, \mu_{\mathrm{Ma}}\}.$$

(Bb) Jetzt betrachten wir

$$Ll\overline{v}_1 = Mm\overline{v}_1 < Kk\overline{v}_r.$$

Für die Partition $\mathcal{P}$ folgt

$$\lambda_{\mathrm{Mi}} \sim \mu_{\mathrm{Mi}}, \quad \lambda_{\mathrm{Mi}} \prec \kappa_{\mathrm{Ma}}.$$

Mit Hilfe von (P) erhalten wir

$$Kk\overline{v}_1 \le Ll\overline{v}_r = Mm\overline{v}_r.$$

Wir können uns auf den Fall

$$Kk\overline{v}_1 < Ll\overline{v}_r = Mm\overline{v}_r$$

beschränken. Das ergibt Partitionen der Form

$$\{\lambda_{\mathrm{Mi}}, \mu_{\mathrm{Mi}}\} \prec \cdots \prec \{\lambda_{\mathrm{Ma}}, \mu_{\mathrm{Ma}}\}.$$

$L < M$ ist äquivalent zu den Ungleichungen

$$L((l-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_2) < M((m-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_2),$$
$$L((l-1)\overline{v}_r + \overline{v}_{r-1}) > M((m-1)\overline{v}_r + \overline{v}_{r-1}).$$

Aus Lemma 4.1 schließen wir

$$Kk\overline{v}_r = L((l-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_2), \tag{4.48}$$

$$Kk\overline{v}_1 = L((l-1)\overline{v}_r + \overline{v}_{r-1}). \tag{4.49}$$

(4.48) bedeutet für die Partition $\mathcal{P}$

$$\kappa_{\mathrm{Ma}} \sim \lambda_{\mathrm{mi}}.$$

(4.49) entspricht der Aussage

$$\kappa_{\mathrm{Mi}} \sim \lambda_{\mathrm{Ma}}.$$

$Ll\overline{v}_1 = Mm\overline{v}_1 < Kk\overline{v}_r$ und $L < M$ führt zu

$$\{\lambda_{\mathrm{Mi}}, \mu_{\mathrm{Mi}}\} \prec \{\kappa_{\mathrm{Ma}}, \lambda_{\mathrm{mi}}\} \prec \cdots \prec \{\lambda_{\mathrm{ma}}, \kappa_{\mathrm{Mi}}\} \prec \{\lambda_{\mathrm{Ma}}, \mu_{\mathrm{Ma}}\}.$$

Im Teil II zeigen wir, daß die durch die Partitionen (4.30)–(4.34) gegebenen Gleichungssysteme höchstens eindimensional sind.

Teil II. Zunächst bringen wir ein Hilfsresultat. Mit V bezeichnen wir den Lösungsraum des Gleichungssystems (4.11).

Lemma 4.2. *Es gelten die Voraussetzungen von Proposition* 4.3. *Wir nehmen*

$$L, M > 0, \quad K < 0$$

an. Sei

$$\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \textit{und} \quad v_1 = v_r = 0.$$

Wir setzen

$$s_0 = \min\{i \colon v_i \neq 0\},$$
$$t_0 = \max\{i \colon v_i \neq 0\}$$

(*es ist also* $1 < s_0 \leq t_0 < r$). *Weiters werden* λ_0, μ_0, κ_0 *definiert durch*

$$\lambda_0 = (1, \dots, 1, s_0)_l, \quad \mu_0 = (1, \dots, 1, s_0)_m, \quad \kappa_0 = (t_0, r, \dots, r)_k.$$

Dann gilt die folgende Behauptung:

$$\kappa_0 \sim \lambda_0 \quad \textit{oder} \quad \kappa_0 \sim \mu_0.$$

Beweis. Nach Konstruktion ist

$$\bar{s}(\kappa_0), \quad \bar{s}(\lambda_0), \quad \bar{s}(\mu_0) \neq 0. \tag{4.50}$$

($\bar{s}$ steht jetzt für $\bar{s}_{\boldsymbol{v}}$, z.B. ist $\bar{s}(\kappa_0) = K v_{t_0}$!)
Aus

$$\kappa = (i_1, \dots, i_k) \in A_k, \quad i_1 > t_0$$

folgt $\bar{s}(\kappa) = 0$, daher $\kappa \not\sim \kappa_0$ nach (4.50). Mittels Lemma 4.1 ziehen wir aus

$$i_1 \leq t_0, \quad \kappa \neq \kappa_0$$

den Schluß

$$\kappa \not\sim \kappa_0.$$

Also ist κ_0 isoliert in A_k. Analog ist λ_0 isoliert in A_l und μ_0 isoliert in A_m. Eigenschaft (P) bewirkt

$$\kappa_0 \sim \omega \quad \text{für ein } \omega \in A_l \cup A_m.$$

Wir sind fertig, falls $\omega = \lambda_0$ oder $\omega = \mu_0$. Sei zunächst

$$\omega = \lambda \in A_l, \quad \lambda \neq \lambda_0, \quad \lambda = (i_1, \dots, i_l).$$

Wegen $\kappa_0 \sim \lambda$ ist

$$\bar{s}(\lambda) = \bar{s}(\kappa_0) \neq 0.$$

Es folgt $i_l \geq s_0$. Nach Lemma 4.1 ist

$$\lambda_0 \prec \lambda \sim \kappa_0.$$

Wegen $\lambda_0 \prec \kappa_0$ gilt

$$\lambda_0 \not\sim \kappa \quad \forall \kappa \in A_k$$

(da $\overline{s}(\kappa) = 0 \ \forall \kappa \prec \kappa_0$). Wie oben erwähnt, ist λ_0 isoliert in A_l.

Wir haben abgeleitet: Falls $\kappa_0 \sim \lambda \neq \lambda_0$, dann muß $\lambda_0 \sim \mu$ für ein $\mu \in A_m$ gelten. Wäre $\mu \neq \mu_0$, so würde wie oben folgen

$$\mu_0 \prec \mu \sim \lambda_0 \prec \kappa_0$$

und daraus wie oben: μ_0 isoliert in A_m sowie

$$\mu_0 \not\sim \kappa \quad \forall \kappa \in A_k,$$
$$\mu_0 \not\sim \lambda \quad \forall \lambda \in A_l.$$

Das ist ein Widerspruch zu (P).

Es folgt also

$$\lambda_0 \sim \mu_0.$$

Ebenso folgt aus

$$\kappa_0 \sim \mu \in A_m \quad \text{mit } \mu \neq \mu_0,$$

daß

$$\lambda_0 \sim \mu_0.$$

Daher impliziert $\kappa_0 \sim \omega$ für $\omega \in A \setminus \{\lambda_0, \mu_0\}$ die Gleichungen

$$\overline{s}(\lambda_0) = Lv_{s_0} = \overline{s}(\mu_0) = Mv_{s_0}.$$

Das ergibt

$$L = M.$$

$\lambda_0 \sim \mu_0$ bedeutet eine Gleichung in (4.11). Wir wählen einen zulässigen Vektor $\overline{\boldsymbol{v}}$, der ja eine Lösung von (4.11) darstellt. Daher gilt mit

$$\overline{s}_{\overline{\boldsymbol{v}}}(\lambda_0) = L((l-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_{s_0}),$$
$$\overline{s}_{\overline{\boldsymbol{v}}}(\mu_0) = M((m-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_{s_0})$$

die Identität

$$\overline{s}_{\overline{\boldsymbol{v}}}(\lambda_0) = \overline{s}_{\overline{\boldsymbol{v}}}(\mu_0).$$

Mittels $L = M$ und $\overline{v}_1 \neq 0$ erhalten wir $l = m$, ein Widerspruch. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Folgerung 4.1. Wir setzen

$$\lambda_1 = (t_0, r, \ldots, r)_l, \quad \mu_1 = (t_0, r, \ldots, r)_m, \quad \kappa_1 = (1, \ldots, 1, s_0)_k.$$

Es folgt analog („Spiegelung“):

$$\kappa_1 \sim \lambda_1 \quad \text{oder} \quad \kappa_1 \sim \mu_1.$$

(A) Wir setzen

$$\lambda_{\text{Mi}} \sim \kappa_{\text{Ma}} \tag{4.51}$$

voraus. Nach Teil I umfaßt (4.51) die Fälle (4.30), (4.31), (4.33). Insbesondere gilt

$$\mu_{\text{Ma}} \not\sim \kappa_{\text{Mi}}. \tag{4.52}$$

$$\lambda_{\text{Mi}} \sim \kappa_{\text{Ma}} \text{ ist äquivalent mit } Llv_1 = kKv_r \quad \forall \boldsymbol{v} \in V.$$

Wir werden zeigen, daß der Lösungsraum V eindimensional ist.

Lemma 4.3. *Es gelten die Voraussetzungen von Prop.* 4.3. *Wir nehmen*

$$L, M > 0, \quad K < 0$$

an. Weiters sei

$$\lambda_{\text{Mi}} \sim \kappa_{\text{Ma}}.$$

Dann gilt die Implikation

$$\boldsymbol{v} \in V, \quad v_1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = 0.$$

Das bedeutet

$$\forall i \, \exists a_i, \quad \text{so daß } \forall \boldsymbol{v} \in V \;\; v_i = a_i v_1,$$

also $\dim V = 1$.

Beweis. Der Beweis von Lemma 4.3 erfolgt indirekt. Angenommen $\boldsymbol{v} \in V \backslash \{\boldsymbol{0}\}$, $v_1 = 0$. Wegen Äquivalenz (4.51) ist $v_r = 0$. Es seien

$$s_0, \; t_0, \; \lambda_0, \; \mu_0, \; \kappa_0, \; \lambda_1, \; \mu_1, \; \kappa_1$$

wie in Lemma 4.2 und Folgerung 4.1 definiert.

Wir betrachten die Blöcke, in denen κ_0, κ_1 liegen und führen in jedem Fall einen Widerspruch herbei. Nach Lemma 4.2 und Folgerung 4.1 können nur die Situationen $\boldsymbol{\alpha}$) – $\boldsymbol{\delta}$) eintreten.

$\boldsymbol{\alpha}$) $\kappa_0 \sim \mu_0$, $\kappa_1 \sim \mu_1$

Einsetzen in $\bar{s}_v$ liefert

$$Kv_{t_0} = Mv_{s_0}, \quad Kv_{s_0} = Mv_{t_0}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$K^2 = M^2$$

und wegen $K < 0 < M$

$$K = -M.$$

Einsetzen in $\overline{s}_{\overline{v}}$ liefert

$$K((k-1)\overline{v}_r + \overline{v}_{t_0}) = M((m-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_{s_0})$$
$$K((k-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_{s_0}) = M((m-1)\overline{v}_r + \overline{v}_{t_0}).$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen erhalten wir

$$(k-1)(\overline{v}_r - \overline{v}_1) = (m-1)(\overline{v}_r - \overline{v}_1),$$

also $k = m$, ein Widerspruch.

β) $\kappa_0 \sim \lambda_0$, $\kappa_1 \sim \lambda_1$
Einsetzen in $\overline{s}_v$ liefert

$$Kv_{t_0} = Lv_{s_0}, \quad Kv_{s_0} = Lv_{t_0}.$$

Wie in **α**) schließen wir $K^2 = L^2$, daher ist

$$K = -L.$$

Für die Partitionen (4.30), (4.31) gilt nach (4.36), (4.37)

$$Ll = -Kk.$$

In diesen beiden Fällen folgt also mittels $L = -K$ der Widerspruch $l = k$.

Im Fall (4.33) gehen wir wie in **α**) vor.

γ) $\kappa_0 \sim \lambda_0$, $\kappa_1 \sim \mu_1$
Das ergibt wie in **α**)

$$Kv_{t_0} = Lv_{s_0}, \quad Kv_{s_0} = Mv_{t_0},$$

also ist

$$K^2 = LM.$$

Aus $\kappa_0 \sim \lambda_0$ folgt wegen $\kappa_{\mathrm{Ma}} \sim \lambda_{\mathrm{Mi}}$:

$$\overline{s}(\kappa_0) - \overline{s}(\kappa_{\mathrm{Ma}}) = \overline{s}(\lambda_0) - \overline{s}(\lambda_{\mathrm{Mi}}).$$

Für $\overline{\boldsymbol{v}}$ liefert das

$$K(\overline{v}_{t_0} - \overline{v}_r) = L(\overline{v}_{s_0} - \overline{v}_1).$$

Wegen $K^2 = LM$ folgt

$$M(\overline{v}_{t_0} - \overline{v}_r) = K(\overline{v}_{s_0} - \overline{v}_1). \tag{4.53}$$

Aus $\mu_1 \sim \kappa_1$ erhalten wir

$$M((m-1)\overline{v}_r + \overline{v}_{t_0}) = K((k-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_{s_0}).$$

Die beiden letzten Gleichungen führen mittels der Beziehung (4.53) zu

$$Mm\overline{v}_r = Kk\overline{v}_1.$$

Das widerspricht der Aussage (4.52)

$$\mu_{\mathrm{Ma}} \not\sim \kappa_{\mathrm{Mi}}.$$

δ) $\kappa_0 \sim \mu_0$, $\kappa_1 \sim \lambda_1$
Wir schließen aus

$$Kv_{t_0} = Mv_{s_0}, \quad Kv_{s_0} = Lv_{t_0},$$

daß die Relation

$$K^2 = LM$$

gilt.

Falls $\mu_{\mathrm{Mi}} \sim \kappa_{\mathrm{Ma}}$ (das entspricht dem Fall (4.33)) folgt aus $\kappa_0 \sim \mu_0$ wie oben

$$K(\overline{v}_{t_0} - \overline{v}_r) = M(\overline{v}_{s_0} - \overline{v}_1).$$

Kombiniert mit $\kappa_1 \sim \lambda_1$ erhält man ebenfalls wie oben

$$Ll\overline{v}_r = Kk\overline{v}_1.$$

Das ist ein Widerspruch zu $\kappa_{\mathrm{Mi}} \prec \lambda_{\mathrm{Ma}}$.

Falls $\kappa_{\mathrm{Ma}} \prec \mu_{\mathrm{Mi}}$ (siehe (4.30) und (4.31)) haben wir

$$\kappa_{\mathrm{Mi}} \sim \lambda_{\mathrm{Ma}},$$

daher ist $Kk\overline{v}_1 = Ll\overline{v}_r$. Damit folgt aus $\kappa_1 \sim \lambda_1$

$$K(\overline{v}_{s_0} - \overline{v}_1) = L(\overline{v}_{t_0} - \overline{v}_r).$$

Es ergibt sich mit Hilfe der Beziehung $K^2 = LM$

$$M(\overline{v}_{s_0} - \overline{v}_1) = K(\overline{v}_{t_0} - \overline{v}_r).$$

$\kappa_0 \sim \mu_0$ liefert

$$K((k-1)\overline{v}_r + \overline{v}_{t_0}) = M((m-1)\overline{v}_1 + \overline{v}_{s_0}),$$

daher $Kk\overline{v}_r = Mm\overline{v}_1$, ein Widerspruch zur Annahme $\kappa_{\mathrm{Ma}} \prec \mu_{\mathrm{Mi}}$. Damit ist Lemma 4.3 bewiesen.

(B) Wir untersuchen jetzt Partitionen $\mathcal{P}$ mit

$$\lambda_{\mathrm{Mi}} \sim \mu_{\mathrm{Mi}}, \quad \lambda_{\mathrm{Ma}} \sim \mu_{\mathrm{Ma}},$$

das sind die Fälle (4.32)–(4.34). Hier ist

$$Ll\overline{v}_1 = Mm\overline{v}_1$$
$$Ll\overline{v}_r = Mm\overline{v}_r.$$

Wegen $\overline{v}_1 \neq 0$ gilt

$$Ll = Mm,$$

also ist $L \neq M$. Sei o.B.d.A.

$$L < M.$$

Im ersten Teil haben wir im Fall (4.32) aus $L < M$ die Gleichungen

$$Kkv_r = L((l-1)v_1 + v_2), \tag{4.54}$$

$$Kkv_1 = L((l-1)v_r + v_{r-1}) \tag{4.55}$$

abgeleitet. Wir subtrahieren (4.55) von (4.54) und erhalten

$$Kk(v_r - v_1) = Ll(v_1 - v_r) + L(v_2 - v_1) - L(v_{r-1} - v_r).$$

Weiteres Umformen ergibt

$$(Kk + Ll)(v_r - v_1) = L(v_2 - v_1 + v_r - v_{r-1}).$$

Setzen wir speziell einen zulässigen Vektor $(\overline{v}_i)$ ein, so erhalten wir

$$Kk + Ll > 0.$$

Es folgt

$$\overline{v}_r - \overline{v}_1 = \frac{L}{Kk + Ll}(\overline{v}_2 - \overline{v}_1 + \overline{v}_r - \overline{v}_{r-1}). \tag{4.56}$$

(4.56) impliziert für $r > 3$ die Ungleichung

$$\frac{L}{Kk + Ll} > 1$$

und für $r = 3$ die Gleichung

$$\frac{L}{Kk + Ll} = 1.$$

Im Fall (4.33) haben wir die Relationen

$$Ll\overline{v}_1 = Mm\overline{v}_1 = Kk\overline{v}_r,$$
$$Ll\overline{v}_r = Mm\overline{v}_r > Kk\overline{v}_1.$$

Wieder gilt wegen $L < M$

$$Kk\overline{v}_1 = L((l-1)\overline{v}_r + \overline{v}_{r-1}).$$

Mittels der Beziehung $Kk\overline{v}_r = Ll\overline{v}_1$ leiten wir

$$Kk(\overline{v}_r - \overline{v}_1) = Ll(\overline{v}_1 - \overline{v}_r) - L(\overline{v}_{r-1} - \overline{v}_r)$$

ab. Daraus folgt

$$(Kk+Ll)(\overline{v}_r-\overline{v}_1)=L(\overline{v}_r-\overline{v}_{r-1}).$$

Wie oben schließen wir

$$Kk+Ll>0$$

und daher

$$\overline{v}_r-\overline{v}_1=\frac{L}{Kk+Ll}(\overline{v}_r-\overline{v}_{r-1}). \tag{4.55'}$$

Für $r>2$ muß in (4.33)

$$\frac{L}{Kk+Ll}>1$$

sein.

Analog leiten wir im Fall (4.34) für $r>2$ die Ungleichung

$$\frac{L}{Kk+Ll}>1$$

ab.

Wir nehmen o.B.d.A. im Folgenden

$$\mathrm{ggT}(K,L,M)=1$$

an.

Für

$$r=2$$

ist, unabhängig von der Partition $\mathcal{P}$, der Lösungsraum von (4.11) eindimensional.

(Ba) Wir betrachten jetzt im Fall (4.32)

$$r=3.$$

Aus (4.56) folgt

$$Kk=-L(l-1). \tag{4.57}$$

(4.54) und (4.57) führen zu den Gleichungen

$$v_3=-v_1-\frac{1}{l-1}v_2, \quad v_2=-(l-1)v_1-(l-1)v_3. \tag{4.58}$$

Wir betrachten eine Lösung $v'=(v'_1,v'_2,v'_3)$ des Systems (4.11), welche $v'_1=0$ erfüllt. (4.58) wird zu

$$v'_2=-(l-1)v'_3,$$

Da aus der Relation $Ll = Mm$, $L < M$ die Aussage

$$l > 1$$

folgt, muß entweder

$$v_2' \cdot v_3' \neq 0 \quad \text{oder} \quad v_2' = v_3' = 0$$

gelten. Angenommen

$$v_2' \cdot v_3' \neq 0,$$

das bedeutet $\dim V = 2$. Wir wählen o.B.d.A. $v_3' = 1$. Die Beziehung (4.58) führt zu

$$v_2' = -(l-1).$$

Daher ist $\boldsymbol{v}' = (0, -(l-1), 1)$.

Jetzt untersuchen wir die Gleichungen, welche durch die Äquivalenz

$$(2, \ldots, 2)_k \sim \tau \quad \tau \in A$$

induziert werden. Wir setzen die spezielle Lösung $\boldsymbol{v}' = (0, -(l-1), 1)$ in diese Gleichungen ein und leiten aus den entstehenden Relationen Widersprüche her.

$\boldsymbol{\alpha}$) Sei

$$(2, \ldots, 2)_k \sim \mu \quad \text{für ein } \mu \in A_m.$$

Dann existieren ganze Zahlen $a, b, c \geq 0$ mit

$$Kkv_2 = M(av_1 + bv_2 + cv_3).$$

Setzen wir die Lösung $\boldsymbol{v}'$ von (4.11) in obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$-Kk(l-1) = M(-b(l-1) + c).$$

Mittels der Relationen $Kk = -L(l-1)$ und $Ll = Mm$ ergibt das

$$m(l-1)^2 = l(-b(l-1) + c). \tag{4.59}$$

Daher gilt

$$l - 1 | l \cdot c.$$

Wegen $\mathrm{ggT}(l-1, l) = 1$ haben wir

$$l - 1 | c.$$

Es muß $c = 0$ oder $c \geq l - 1$ sein. Für $c = 0$ erhalten wir aus (4.59) den Widerspruch

$$m(l-1)^2 = -b \cdot l \cdot (l-1)$$

(hier geht $l > m \geq 1$ ein). Der Fall $c \geq l-1$ reduziert sich wegen

$$a+b+c=m<l$$

auf $c = l-1$. Hier muß $m = l-1$ und $a = b = 0$ sein. (4.59) wird zu

$$(l-1)^3 = l(l-1),$$

im Widerspruch zu $l > 1$.

$\boldsymbol{\beta}$) Sei jetzt

$$(2,\dots,2)_k \sim \kappa \quad \text{für ein } \kappa \in A_k.$$

Das führt zu der Gleichung

$$kv_2 = av_1 + bv_2 + cv_3 \quad a,b,c \in \mathbb{Z} \quad a,b,c \geq 0,$$

wobei $a+b+c=k$ ist. Es ist also

$$(a+c)v_2 = (k-b)v_2 = av_1 + cv_3.$$

Wir setzen die spezielle Lösung $\boldsymbol{v}' = (0, -(l-1), 1)$ ein und erhalten

$$-(a+c)(l-1) = c.$$

Das ist nur möglich, wenn $a = c = 0$ und $b = k$ ist. $(2,\dots,2)_k$ ist zu keinem anderen Element von A_k äquivalent.

γ) Zuletzt betrachten wir die Äquivalenz

$$(2,\dots,2)_k \sim \lambda \quad \text{für ein } \lambda \in A_l.$$

Es existieren ganze Zahlen $a,b,c \geq 0$, sodaß

$$Kkv_2 = L(av_1 + bv_2 + cv_3)$$

eine Gleichung in dem System (4.11) ist. Wir formen sie mittels (4.57) um und bekommen

$$-(l-1)v_2 = av_1 + bv_2 + cv_3.$$

Die Lösung $(0, -(l-1), 1)$ liefert

$$(l-1)^2 = -(l-1)b + c. \tag{4.60}$$

Es muß

$$l-1|c$$

gelten. Wegen $a+b+c=l$ leiten wir (analog zu $(2,\dots,2)_k \sim \mu$) die Möglichkeiten $c=0$ oder $c=l-1$ oder $c=l=2$ ab. Für $c=0$ folgt aus (4.60)

$$(l-1)^2 = -(l-1)b,$$

im Widerspruch zu $b \geq 0$, $l > 1$. Falls $l = c = 2$ ergeben die Gleichungen (4.60) und $a + b + c = l$ den widersprüchlichen Wert $c = 1$. Im Fall $c = l - 1$ erhalten wir aus (4.60)

$$(l-1)^2 = -(l-1)b + (l-1).$$

Diese Identität wird nur von $b = 0$, $l = 2$ erfüllt. Hier ist $m = 1$, $a = 1$, $c = l - 1 = 1$. Die Beziehungen

$$Kk = -L(l-1) \quad (\text{siehe } (4.57)) \quad \text{und} \quad Ll = Mm$$

führen zu

$$K|L, \quad L|M.$$

Wegen $\mathrm{ggT}(K, L, M) = 1$ ist

$$K = -1, \quad L = k, \quad M = 2k, \quad \boldsymbol{v}' = (0, -1, 1).$$

Die Relation $M = 2L$ zieht eine Gleichung

$$\overline{s}(\kappa) = \overline{s}(\lambda_\kappa)$$

für ein $\lambda_\kappa \in A_l$ nach sich, wenn κ isoliert in A_k ist. Das bedeutet für κ_{mi}

$$K((k-1)v_1 + v_2) = L(\overline{a}v_1 + \overline{b}v_2 + \overline{c}v_3) \quad \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}.$$

Wir setzen die Lösung $\boldsymbol{v}' = (0, -1, 1)$ ein und erhalten

$$1 = L(-\overline{b} + \overline{c}) \quad \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}.$$

Es folgt $k = L = 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung $k \neq m$.

Zusammenfassung: Wir haben im Fall $r = 3$ von (4.32) – unter der Annahme, daß eine nichttriviale Lösung $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ von (4.11) mit $v_1' = 0$ existiert – für jedes $\tau \in A$

$$(2, \ldots, 2)_k \not\sim \tau$$

bewiesen. Für jede Lösung $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in V$ von (4.11) mit $v_1 = 0$ muß daher $v_2 = v_3 = 0$ gelten. Es folgt $\dim V = 1$.

(Bb) Es bleibt noch in den Fällen (4.32) für $r > 3$ bzw. (4.33), (4.34) für $r > 2$ die Ungleichung

$$\frac{L}{Kk + Ll} > 1$$

weiter zu untersuchen. Dann gilt

$$L \nmid Kk.$$

Daraus schließen wir die Existenz einer Primzahl p mit den Eigenschaften

$$p^{\varepsilon} \nmid Kk, \quad p^{\varepsilon}|L, \quad p^{\varepsilon+1} \nmid L,$$

wobei $\varepsilon > 0$ ganz ist. Sei nun $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_r)$ eine ganzzahlige Lösung des Gleichungssystems (4.11) mit

$$\boldsymbol{v} \neq 0, \quad \operatorname{ggT}(v_1, \ldots, v_r) = 1.$$

Weiters seien die Zahlen s_0, t_0 definiert durch

$$s_0 = \min\{i : p \nmid v_i\}, \quad t_0 = \max\{i : p \nmid v_i\}.$$

Diese existieren wegen der Annahme $\operatorname{ggT}(v_1, \ldots, v_r) = 1$. Wir schließen im Fall (4.32) mit Hilfe von (4.54)

$$p|v_r.$$

Bei Situation (4.33) folgt dies aus der Relation $Kkv_r = Llv_1$. Gleichung (4.55) impliziert in den Fällen (4.32) und (4.33)

$$p|v_1.$$

Also ist in (4.32)–(4.34)

$$1 < s_0 \leq t_0 < r$$

(bei (4.34) argumentieren wir durch Spiegelung).

In die Definition der Zahlen s_0, t_0 geht die Lösung $\boldsymbol{v}$ ein. Im nächsten Lemma zeigen wir, daß s_0, t_0 nicht von der Lösung $\boldsymbol{v}$ abhängen.

Lemma 4.4. (i) *In der Partition $\mathcal{P}$ treten die beiden Äquivalenzen*

$$(1, \ldots, 1, s_0)_m \sim (t_0, r, \ldots, r)_k,$$
$$(1, \ldots, 1, s_0)_k \sim (t_0, r, \ldots, r)_m$$

auf. Wir nennen eine solche Beziehung eine Überkreuzung.

(ii) *Eine Überkreuzung kann nur für ein einziges Paar s_0, t_0 stattfinden. Insbesondere hängen s_0, t_0 nicht von der gewählten Lösung $\boldsymbol{v}$ ab.*

Beweis. (i) Seien

$$\kappa_0 = (t_0, r, \ldots, r)_k, \quad \mu_0 = (1, \ldots, 1, s_0)_m.$$

Aus $p|v_r$ und $p \nmid v_{t_0}$ erhalten wir

$$p \nmid s_{\boldsymbol{v}}(\kappa_0).$$

Nach Konstruktion gilt

$$p^{\varepsilon}|L \cdot s_{\boldsymbol{v}}(\lambda) \quad \forall \lambda \in A_l.$$

Daher liegt κ_0 mit keinem l-Tupel in einem Block der Partition.

Sei $\delta \geq 0$ so gewählt, daß
$$p^\delta | K, \quad p^{\delta+1} \nmid K.$$
Es folgt
$$p^{\delta+1} \nmid K((k-1)v_r + v_{t_0}).$$
Wenn
$$\kappa = (i_1, \ldots, i_k) \in A_k, \quad i_1 > t_0,$$
dann muß
$$p^{\delta+1} | \overline{s}(\kappa)$$
sein (weil $p | v_i \ \forall i > t_0$). Also ist
$$\kappa_0 \not\sim \kappa, \quad \text{für } \kappa = (i_1, \ldots, i_k) \in A_k, \quad i_1 > t_0.$$
Wenn
$$\kappa = (i_1, \ldots, i_k) \in A_k, \quad i_1 \leq t_0, \quad \kappa \neq \kappa_0,$$
dann gilt nach Lemma 4.1 ebenfalls
$$\kappa_0 \not\sim \kappa.$$
Weil
$$\kappa_0 \not\sim \lambda \quad \forall \lambda \in A_l, \quad \kappa_0 \not\sim \kappa \quad \forall \kappa \in A_k \backslash \{\kappa_0\},$$
muß für ein $\mu \in A_m$
$$\kappa_0 \sim \mu, \quad \mu = (j_1, \ldots, j_m)$$
sein.

Analog leiten wir für ein $\kappa \in A_k$
$$\mu_0 \sim \kappa, \quad \kappa = (i_1, \ldots, i_k)$$
ab.

Jetzt zeigen wir $\delta = 0$, also
$$p \nmid K.$$
Angenommen $p | K$, dann folgt aus
$$\mathrm{ggT}(K, L, M) = 1 \quad \text{und} \quad p | L$$
die Aussage
$$p \nmid M.$$
Daraus schließen wir
$$p \nmid \overline{s}(\mu_0), \quad p | \overline{s}(\kappa).$$
Das widerspricht $\mu_0 \sim \kappa$.

Daher gilt

$$p \nmid K, \quad \delta = 0.$$

Wir haben bereits festgehalten, daß

$$p^{\delta+1} = p \nmid \overline{s}(\kappa_0).$$

Es folgt

$$p \nmid M,$$

weil $\overline{s}(\kappa_0) = \overline{s}(\mu)$ ist und $p \nmid \overline{s}(\kappa_0)$. Daraus schließen wir

$$j_m \geq s_0,$$

weil andernfalls $p|v_j$ für $j = j_1, \ldots, j_m$. Lemma 4.1 impliziert

$$\mu \succ \mu_0 \quad \text{oder} \quad \mu = \mu_0.$$

Aus $p \nmid M$ leiten wir $p \nmid \overline{s}(\mu_0)$ ab, daher

$$i_1 \leq t_0. \tag{4.61}$$

Angenommen, es wäre $\mu \succ \mu_0$. Wir hätten

$$\kappa_0 \sim \mu \succ \mu_0 \sim \kappa = (i_1, \ldots, i_k).$$

Lemma 4.1 impliziert

$$i_1 > t_0,$$

das steht im Widerspruch zu (4.61). Also gilt

$$\kappa_0 \sim \mu_0.$$

Analog (durch Spiegelung) erhalten wir

$$(1, \ldots, 1, s_0)_k \sim (t_0, r, \ldots, r)_m.$$

(ii) Eine beliebige Überkreuzung

$$(1, \ldots, 1, s)_m \sim (u, r, \ldots, r)_k, \quad (1, \ldots, 1, s)_k \sim (u, r, \ldots, r)_m$$

angewendet auf einen zulässigen Vektor $\overline{v}$ führt zu den Gleichungen

$$M(m-1)\overline{v}_1 + M\overline{v}_s = K\overline{v}_u + K(k-1)\overline{v}_r, \tag{4.62}$$

$$K(k-1)\overline{v}_1 + K\overline{v}_s = M\overline{v}_u + M(m-1)\overline{v}_r. \tag{4.63}$$

Aus der Annahme $K = -M$ erhielten wir durch Addition der beiden Gleichungen

$$M(m-k)\overline{v}_1 = M(m-k)\overline{v}_r.$$

Wegen $\overline{v}_1 \neq \overline{v}_r$ wäre $m = k$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Es muß also

$$K \neq -M$$

sein. Daher gilt

$$K^2 \neq M^2. \tag{4.64}$$

Wir rechnen $\overline{v}_s$ aus der Gleichung (4.62) aus und setzen in (4.63) ein. Das ergibt

$$K(k-1)\overline{v}_1 + \frac{K}{M}(K\overline{v}_u + K(k-1)\overline{v}_r - M(m-1)\overline{v}_1) = M\overline{v}_u + M(m-1)\overline{v}_r.$$

Durch weiteres Umformen erhalten wir

$$(K^2 - M^2)\overline{v}_u = (M^2(m-1) - K^2(k-1))\overline{v}_r + MK(m-k)\overline{v}_1.$$

Wegen (4.64) können wir $\overline{v}_u$ als Linearkombination von $\overline{v}_1$ und $\overline{v}_r$ ausdrücken. Dabei sind die Koeffizienten unabhängig von s und u. Ebenso sehen wir, daß sich auch $\overline{v}_s$ als Linearkombination von $\overline{v}_1$ und $\overline{v}_r$ schreiben läßt, wobei die Koeffizienten nicht von s und u abhängen.

Daher kann eine solche Überkreuzung nur für ein einziges Paar s_0, t_0 auftreten. □

Ergebnis. Aus Lemma 4.4(ii) folgt sofort, daß der Lösungsraum von (4.11) eindimensional sein muß. Gäbe es zwei linear unabhängige Lösungen, so könnte man daraus eine nichttriviale ganze Lösung mit $v_{s_0} = 0$ konstruieren, was einen Widerspruch zur Definition von s_0 bedeutet.

Teil III. Sei

$$L, M > 0, \quad K < 0.$$

Wir betrachten jene Partitionen, welche den Block $\{\lambda_{\mathrm{Mi}}, \mu_{\mathrm{Mi}}, \kappa_{\mathrm{Ma}}\}$ enthalten (Fall (4.33)). Das bedeutet speziell für einen zulässigen Lösungsvektor

$$Mm\overline{v}_1 = Ll\overline{v}_1 = Kk\overline{v}_r. \tag{4.65}$$

Es wurde im ersten Teil unter Berücksichtigung von $L \neq M$

$$\kappa_{\mathrm{Mi}} \prec \lambda_{\mathrm{Ma}}$$

abgeleitet. Aus der Wahl von

$$L < M$$

folgte

$$\lambda_{\text{mi}} \sim \kappa_{\text{ma}}, \quad \lambda_{\text{ma}} \sim \kappa_{\text{Mi}}.$$

Die beiden Äquivalenzen ziehen die Gleichungen

$$L(v_2 - v_1) = K(v_{r-1} - v_r), \tag{4.66}$$

$$L((l-1)v_r + v_{r-1}) = Kkv_1 \tag{4.67}$$

nach sich. Wir nehmen

$$\text{ggT}(K, L, M) = 1$$

an.

Lemma 4.5. *Unter obigen Voraussetzungen gilt für* $(K, L, M) \in H(\mathcal{P})$:

(i) $ggT(K, L) = 1$
Es ist sogar die schärfere Aussage
(ii) $K = -1$
richtig.

Beweis. (i) Angenommen, es existiert eine Primzahl p mit

$$p|K, \quad p|L. \tag{4.68}$$

Wegen $\text{ggT}(K, L, M) = 1$ haben wir

$$p \nmid M.$$

Sei $(\overline{v}_i)$ ein fester zulässiger Vektor, welcher das System (4.11) löst. Sei $\varepsilon \geq 0$ maximal mit der Eigenschaft

$$p^{\varepsilon}|\overline{v}_i - \overline{v}_1 \quad \forall i.$$

Also ist auch

$$p^{\varepsilon}|\overline{v}_r - \overline{v}_i \quad \forall i.$$

Wir setzen

$$s_0 = \min\{i \colon p^{\varepsilon+1} \nmid \overline{v}_i - \overline{v}_1\},$$
$$\mu_0 = (1, \ldots, 1, s_0)_m.$$

Offensichtlich ist

$$s_0 \geq 2.$$

Aus $p \nmid M$ folgt

$$p^{\varepsilon+1} \nmid M(\overline{v}_{s_0} - \overline{v}_1) = \overline{s}(\mu_0) - \overline{s}(\mu_{\text{Mi}}).$$

Für

$$\mu = (i_1, \dots, i_m) \in A_m \quad \text{mit} \quad i_m < s_0$$

gilt

$$p^{\varepsilon+1} \mid M\left(\sum_{u=1}^{m} \overline{v}_{i_u} - \overline{v}_1\right) = \overline{s}(\mu) - \overline{s}(\mu_{\text{Mi}}).$$

Zusammen mit Bemerkung 4.1 ergibt das

$$\overline{s}(\mu_0) - \overline{s}(\mu_{\text{Mi}}) \neq \overline{s}(\mu) - \overline{s}(\mu_{\text{Mi}}) \quad \forall \mu \in A_m \setminus \{\mu_0\},$$

das heißt

$$\mu_0 \not\sim \mu \quad \forall \mu \in A_m \setminus \{\mu_0\}. \tag{4.69}$$

Wegen (4.68) haben wir

$$p^{\varepsilon+1} | \overline{s}(\lambda) - \overline{s}(\lambda_{\text{Mi}}),$$
$$p^{\varepsilon+1} | \overline{s}(\kappa) - \overline{s}(\kappa_{\text{Ma}}).$$

Daraus schließen wir

$$\mu_0 \not\sim \lambda \quad \forall \lambda \in A_l \tag{4.70}$$

$$\mu_0 \not\sim \kappa \quad \forall \kappa \in A_k. \tag{4.71}$$

(4.69)–(4.71) bilden einen Widerspruch zu (P).

(ii) Der Beweis wird ebenfalls indirekt geführt. Es existiere eine Primzahl p mit

$$p | K.$$

Nach (i) haben wir

$$p \nmid L.$$

Seien ε, s_0 wie in (i) definiert. Wir setzen

$$\lambda_0 = (1, \dots, 1, s_0)_l.$$

Wegen $p \nmid L$ gilt

$$p^{\varepsilon+1} \nmid L(\overline{v}_{s_0} - \overline{v}_1) = \overline{s}(\lambda_0) - \overline{s}(\lambda_{\text{Mi}}). \tag{4.72}$$

$p|K$ impliziert

$$p^{\varepsilon+1} | \overline{s}(\kappa) - \overline{s}(\kappa_{\text{Ma}}) \quad \forall \kappa \in A_k. \tag{4.73}$$

$\lambda_{\text{Mi}} \sim \kappa_{\text{Ma}}$, (4.72) und (4.73) ergeben

$$\overline{s}(\lambda_0) \neq \overline{s}(\kappa) \quad \forall \kappa \in A_k,$$

das heißt

$$\lambda_0 \not\sim \kappa \quad \text{für diese } \kappa.$$

Für

$$\lambda = (i_1, \ldots, i_l) \in A_l \quad \text{mit} \quad i_l < s_0$$

gilt

$$p^{\varepsilon+1} | \overline{s}(\lambda) - \overline{s}(\lambda_{\text{Mi}}). \tag{4.74}$$

(4.72) und (4.74) kombiniert mit Bemerkung 4.1 zeigen

$$s(\lambda_0) \neq s(\lambda), \quad \lambda \not\sim \lambda_0 \quad \forall \lambda \in A_l \setminus \{\lambda_0\}.$$

Durch die Bedingung (P) ist ein $\mu \in A_m$ gegeben mit

$$\lambda_0 \sim \mu, \quad \mu = (i_1, \ldots, i_m).$$

Wir haben

$$i_m < s_0,$$

andernfalls wäre wegen der Voraussetzung

$$L < M, \quad \mu_{\text{Mi}} \sim \lambda_{\text{Mi}}$$

die Ungleichungskette

$$\overline{s}(\lambda_0) < \overline{s}((1, \ldots, 1, s_0)_m) \leq \overline{s}(\mu)$$

richtig. Daher gilt

$$p^{\varepsilon+1} | M \sum_{u=1}^{m} (\overline{v}_{i_u} - \overline{v}_1) = \overline{s}(\mu) - \overline{s}(\mu_{\text{Mi}}). \tag{4.75}$$

Vergleichen wir die Aussagen (4.72) und (4.75), dann ergibt sich

$$\overline{s}(\lambda_0) \neq \overline{s}(\mu).$$

Das widerspricht der Äquivalenz

$$\lambda_0 \sim \mu.$$

Damit ist $K = -1$ gezeigt. □

Die Gleichungen (4.65), (4.67) führen zu den Relationen

$$Ll\overline{v}_1 = -k\overline{v}_r, \tag{4.76}$$

$$L((l-1)\overline{v}_r + \overline{v}_{r-1}) = -k\overline{v}_1. \tag{4.77}$$

Wir subtrahieren (4.77) von (4.76) und erhalten

$$Ll\overline{v}_1 - Ll\overline{v}_r - L(\overline{v}_{r-1} - \overline{v}_r) = -k(\overline{v}_r - \overline{v}_1).$$

Es folgt

$$(Ll-k)(\overline{v}_r - \overline{v}_1) = L(\overline{v}_r - \overline{v}_{r-1}). \tag{4.78}$$

Sei

$$r = 2.$$

Dann ist

$$Ll - k = L, \tag{4.79}$$

daher

$$k = L(l-1).$$

Für $r = 2$ ergibt (4.66)

$$L(\overline{v}_2 - \overline{v}_1) = -(\overline{v}_1 - \overline{v}_2).$$

Also ist

$$L = 1, \quad k = l - 1, \quad l = Mm. \tag{4.80}$$

Die Gleichung (4.76) wird zu

$$l\overline{v}_1 = -k\overline{v}_2 = -(l-1)\overline{v}_2.$$

Der Lösungsraum ist eindimensional.

Für

$$r > 2$$

zieht die Formel (4.78) die Ungleichungen

$$0 < Ll - k < L$$

nach sich. Es gilt

$$L \nmid Ll - k$$

und damit auch

$$L \nmid k.$$

Sei p eine Primzahl, $\varepsilon > 0$ mit

$$p^\varepsilon | L, \quad p^\varepsilon \nmid k, \quad p^{\varepsilon+1} \nmid L.$$

Wir gehen weiter vor wie in Teil II. Die Zahlen s_0, t_0 werden wie früher definiert, das heißt

$$s_0 = \min\{i\colon p \nmid \overline{v}_i\}, \quad t_0 = \max\{i\colon p \nmid \overline{v}_i\}.$$

Wegen (4.77) ist

$$s_0 \geq 2.$$

Mit Hilfe von (4.76) schließen wir

$$t_0 \leq r - 1.$$

Sei $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_r)$ eine ganzzahlige Lösung des Systems (4.11). In Teil II haben wir gesehen, daß s_0, t_0 nicht von der gewählten Lösung $\boldsymbol{v}$ abhängen. Weiters haben wir die Äquivalenzen

$$(1, \ldots, 1, s_0)_m \sim (t_0, r, \ldots, r)_k,$$
$$(1, \ldots, 1, s_0)_k \sim (t_0, r, \ldots, r)_m$$

gezeigt. Diese führen für $K = -1$ zu den Gleichungen

$$M(\overline{v}_{s_0} - \overline{v}_1) = (-1)(\overline{v}_{t_0} - \overline{v}_r), \tag{4.81}$$

$$(-1)(\overline{v}_{s_0} - \overline{v}_1) + L(\overline{v}_{r-1} - \overline{v}_r) = M(\overline{v}_{t_0} - \overline{v}_r). \tag{4.82}$$

Bei der Ableitung von (4.82) haben wir die Beziehung (4.77) verwendet. Addition von (4.81) und (4.82) ergibt

$$(M - 1)(\overline{v}_{s_0} - \overline{v}_1 + \overline{v}_r - \overline{v}_{t_0}) = L(\overline{v}_r - \overline{v}_{r-1}).$$

Da

$$\overline{v}_r - \overline{v}_{t_0} \geq \overline{v}_r - \overline{v}_{r-1}, \quad \overline{v}_{s_0} - \overline{v}_1 > 0$$

ist, erhalten wir

$$M - 1 < L.$$

Das widerspricht der Voraussetzung

$$L < M.$$

Literatur

[1] Evertse, J. H., Győry, K., Stewart, C. L., Tijdeman, R. (1988) *S*-unit equations and their applications. New Advances in Transcendence Theory (Baker, A. ed.), Cambridge Univ. Press

[2] Laurent, M. (1989) Équations exponentielles-polynômes et suites récurrentes linéaires, II. – J. Number Theory **31**: 24–53

[3] Lech, C. (1953) A note on recurring series. – Ark. Mat. **2**: 417–421

[4] Mahler, K. (1935) Eine arithmetische Eigenschaft der Taylorkoeffizienten rationaler Funktionen. – Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **38**: 50–60

[5] Van der Poorten, A. J., Schlickewei, H. P. (1991) Zeros of recurrence sequences. – Bull. Austral. Math. Soc. **44**: 215–223

[6] Schlickewei, H. P. (1993) Multiplicities of algebraic linear recurrences. – Acta. Math. **170**: 151–180

[7] Schlickewei, H. P. (1996) Multiplicities of recurrence sequences. – Acta. Math. **176**: 171–243

[8] Schlickewei, H. P., Schmidt, W. M. (1993) Equations $au_n{}^l = bu_m{}^k$ satisfied by members of recurrence sequences. – Proc. Amer. Math. Soc. **118**: 1043–1051

[9] Schlickewei, H. P., Schmidt, W. M. (1993) Linear equations in members of recurrence sequences. – Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **20**: 219–246

[10] Schlickewei, H. P., Schmidt, W. M. (1993) On polynomial-exponential equations. – Math. Ann. **296**: 339–361

[11] Schlickewei, H. P., Schmidt, W. M. (1995) The intersection of recurrence sequences. – Acta. Arith. **72**: 1–44

[12] Shorey, T. N., Tijdeman, R. (1986) Exponential diophantine equations. Cambridge University Press

[13] Skolem, Th. (1933) Einige Sätze über gewisse Reihenentwicklungen und exponentiale Beziehungen mit Anwendung auf diophantische Gleichungen. – Oslo Vid. akad. Skrifter I, Nr 6

[14] Skolem, T. (1934) Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentieller Gleichungen und diophantischer Gleichungen. – C. r. 8 congr. scand. à Stockholm, 163–188

Anschrift des Verfassers: Dr. Susanne Grünes, Salzgries 3/45, A-1010 Wien.