Anzeiger Abt. II (2001) 138: 7–12

Anzeiger
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Über die stetigen Lösungen der Gołąb-Schinzel-Gleichung auf $\mathbb{R}$ und auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$

Von

L. Reich

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 5. April 2001
durch das w. M. Ludwig Reich)

Summary

We construct the general continuous solution of the Gołąb-Schinzel functional equation on the reals by extending the continuous solutions of the same equation on $\mathbb{R}_{\geq 0}$, as described in [4]. This extension procedure is based on the method applied in [4] to study the possible zeros of a solution.

Mathematics Subject Classification (1991): 39B12, 39B22, 39B52.

*

In [4] bestimmten wir die stetigen Lösungen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ der Funktionalgleichung

$$f(x + yf(x)) = f(x)f(y), \quad \text{falls } x, y, x + yf(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \tag{GS1}$$

Ein verwandtes Problem, nämlich die Bestimmung aller stetigen Lösungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Funktionalgleichung

$$f(x + yf(x)) = f(x)f(y), \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \tag{GS1$'$}$$

wurde in [2] gelöst.

In der vorliegenden Note wollen wir nun das Ergebnis von [4] und die dort angewandte Methode, die hauptsächlich in der Untersuchung des Nullstellenverhaltens der Lösungen besteht, dazu verwenden, alle stetigen Lösungen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Funktionalgleichung von Gołąb-Schinzel,

$$g(x + yg(x)) = g(x)g(y), \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}, \tag{GS}$$

zu finden. Die Lösungen dieses klassischen Problems sind wohlbekannt (siche z.B. [1], pp. 132–135, [3]). Es geht also hier in erster Linie darum, die Tragweite der Methode aus [4] zu überprüfen. Wichtige Literaturverweise zur Funktionalgleichung (GS) finden sich z.B. in [2].

A. Wir beginnen mit der Zusammenstellung einiger Hilfsmittel für die folgenden Detailuntersuchungen. Unter einer *Lösung* von (GS) oder (GS1) verstehen wir hier stets eine *stetige Lösung*.

Lemma 1. *a) Ist g eine Lösung von* (GS) *und ist $g(\xi) \neq 1$ für ein $\xi \in \mathbb{R}$, so ist*

$$g^*(\xi) := \frac{\xi}{1 - g(\xi)}$$

Nullstelle von g.

b) Ist z Nullstelle der Lösung g von (GS), *so ist für jedes $x \in \mathbb{R}$*

$$g_z^{**}(x) := x + zg(x)$$

Nullstelle von g.

Der Beweis ist im wesentlichen der gleiche wie bei Lemma 1 in [4]. ∎

Lemma 2. *Ist g Lösung von* (GS), *so ist $\bar{g} : x \mapsto g(-x)$ (für $x \in \mathbb{R}$) ebenfalls Lösung von* (GS).

Beweis. Es ist (hier wird keinerlei Regularitätsvoraussetzung verwendet)

$$\begin{aligned}\bar{g}(x + y\bar{g}(x)) &= g(-x - yg(-x)) = g((-x) + (-y)g(-x)) \\ &= g(-x)g(-y) = \bar{g}(x)\bar{g}(y).\end{aligned}$$ ∎

Man bemerkt, daß für jede Lösung g von (GS) $f := g|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ Lösung von (GS1) ist. Somit genügt es, zu den in [4] angeführten Lösungen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ von (GS1) alle möglichen Fortsetzungen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (also mit $g|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = f$) zu finden, die (GS) lösen. Für die Lösungen von (GS1) verweisen wir auf den *Satz* in [4]. Unter einer *Fortsetzung* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer Lösung f von (GS1) verstehen wir im folgenden die Fortsetzung zu einer stetigen Lösung g von (GS) (mit $g|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = f$).

B. Es sei $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ist g Fortsetzung von f, $x \in \mathbb{R}$, so wähle $y_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, für das $x + y_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist einerseits

$g(y_0 + x) = f(y_0 + x) = 1$, $g(y_0) = f(y_0) = 1$, andererseits folgt aus (GS)

$$1 = g(y_0 + x) = g(y_0 + xg(y_0)) = g(y_0)g(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

also $g = 1$.

Es sei nun $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und g Fortsetzung von f. Dann finden wir aus (GS) für $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = g(x + 0 \cdot g(x)) = g(x)g(0) = g(x)f(0) = 0,$$

somit $g = 0$.

C. In diesem Abschnitt bestimmen wir die Fortsetzungen g der nichtkonstanten Lösungen f von (GS1) ohne Nullstellen, also von $f(x) = \gamma x + 1$, $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, mit $\gamma > 0$. Nach Lemma 1a) ist für jedes $x > 0$

$$g^*(x) = \frac{x}{1 - f(x)} = \frac{x}{1 - (\gamma x + 1)} = -\frac{1}{\gamma}(< 0)$$

Nullstelle von g. Gemäß Lemma 2 bilden wir $\bar{g}$, sodaß $\bar{g}|_{[0,\infty[}$ eine Lösung φ von (GS1) mit $\varphi(0) = 1$ und der Nullstelle $1/\gamma$ ist. Daher ist (mit $\bar{\gamma} > 0$)

$$\text{a)} \quad g(x) = \begin{cases} \bar{\gamma}x + 1, & -1/\gamma \leq x \leq 0 \\ 0, & x \leq -1/\bar{\gamma}, \end{cases}$$

oder

$$\text{b)} \quad g(x) = \bar{\gamma}x + 1, x \leq 0.$$

Im zweiten Fall b) hat g nur eine Nullstelle, diese muß $-1/\gamma$ sein, und es folgt $\gamma = \bar{\gamma}$, also

$$g(x) = \gamma x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Im ersten Fall a) wollen wir ebenfalls $\gamma = \bar{\gamma}$ beweisen. Angenommen, $\gamma \neq \bar{\gamma}$. Da $-1/\bar{\gamma}$ die größte Nullstelle von g ist, so ist $-1/\gamma < -1/\bar{\gamma}$. Es sei $y > 0$. Dann ist nach Lemma 1b)

$$g^{**}_{-1/\bar{\gamma}}(y) = y - \frac{1}{\bar{\gamma}}f(y) = y - \frac{1}{\bar{\gamma}}(\gamma y + 1) = \left(1 - \frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)y - \frac{1}{\bar{\gamma}}$$

Nullstelle von g, also

$$\left(1 - \frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)y - \frac{1}{\bar{\gamma}} \leq -\frac{1}{\bar{\gamma}},$$

und wegen $0 < \gamma/\bar{\gamma} < 1$, $0 < 1 - \gamma/\bar{\gamma}$, also $y \leq 0$, ein Widerspruch. Somit ist auch hier $\gamma = \bar{\gamma}$, und

$$g(x) = \begin{cases} \gamma x + 1, & -1/\gamma \leq x \\ 0, & x \leq -1/\gamma. \end{cases}$$

Dies ist tatsächlich Lösung von (GS).

D. Es sei $f(x) = \gamma x + 1$, $x \geq 0$, mit $\gamma < 0$, g bezeichne die Fortsetzung von f. Es ist wieder (siehe Lemma 2) $\bar{g}|_{[0,\infty[}$ eine Lösung von (GS1) mit dem Anfangswert 1. Demgemäß ergeben sich für $\varphi := \bar{g}|_{]-\infty,0]}$ nach dem Satz in [4] die Möglichkeiten

a) $\varphi = 1$, $x \leq 0$,
b) $\varphi(x) = \bar{\gamma}x + 1$ (mit $\bar{\gamma} < 0$), $\quad x \leq 0$,
c) $\varphi(x) = \bar{\gamma}x + 1$ (mit $\bar{\gamma} > 0$), $\quad x \leq 0$,
d) $\varphi(x) = \begin{cases} \bar{\gamma}x + 1 \ (\bar{\gamma} > 0), & -1/\bar{\gamma} \leq x \leq 0 \\ 0, & x \leq -1/\bar{\gamma}. \end{cases}$

Der Fall a) erweist sich als unmöglich, mit den gleichen Argumenten wie bei der Fortsetzung von $f(x) = 1$, $x \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, in **B**.

Im Fall b) beweisen wir $\gamma = \bar{\gamma}$. Es ist nämlich (siehe Lemma 2)

$$x \mapsto \begin{cases} -\bar{\gamma}x + 1, & x \geq 0 \\ -\gamma x + 1, & x \leq 0, \end{cases}$$

eine Fortsetzung der Lösung $x \mapsto -\bar{\gamma}x + 1(-\bar{\gamma} > 0)$ von (GS1), also nach **C.**, 1. Teil. $\gamma = \bar{\gamma}$. Somit finden wir im Fall b)

$$g(x) = \gamma x + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

und dies ist Lösung von (GS).

Im Fall c) sei $x \in]-1/\bar{\gamma}, 0[$. Dann ist nach Lemma 1b)

$$g^{**}_{-1/\gamma}(x) := x - \frac{1}{\gamma} g(x)$$

Nullstelle von g. Da

$$x - \frac{1}{\gamma} g(x) = x - \frac{1}{\gamma}(\bar{\gamma}x + 1) = \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\gamma}\right)x - \frac{1}{\gamma}, \quad x - \frac{1}{\gamma} g(x) > x > -\frac{1}{\gamma}$$

wegen $g(x) > 0$, falls $-1/\bar{\gamma} < x < 0$, für die betrachteten x, so erhält man $(1 - \bar{\gamma}/\gamma)x - 1/\gamma \geq -1/\gamma$, und wegen $-\bar{\gamma}/\gamma > 0$ also $x \geq 0$. Dies ist ein Widerspruch, Fall c) also nicht möglich.

Im Fall d) führt dieselbe Rechnung wie bei c) zu einem Widerspruch.

E. Schließlich sei

$$f(x) = \begin{cases} \gamma x + 1 \ (\gamma < 0), & 0 \le x \le -1/\gamma \\ 0, & x \ge -1/\gamma, \end{cases}$$

g wieder die Fortsetzung von f.

Die Fortsetzungen durch

a) $g(x) = 1$, $x \le 0$, bzw,
b) $g(x) = \bar{\gamma}x + 1$ $(\bar{\gamma} > 0)$, $x \le 0$, bzw,
c) $g(x) = \begin{cases} \bar{\gamma}x + 1 \ (\bar{\gamma} < 0), & -1/\bar{\gamma} \le x \le 0 \\ 0, & x \le -1/\bar{\gamma}, \end{cases}$

werden durch analoge Schlüsse wie bisher ausgeschlossen.

Im Fall a) wäre nämlich (mit $\bar{g}$ gemäß Lemma 2) $\tilde{g}|_{]-\infty,0[}$, mit $\tilde{g}|_{]-\infty,0[}(x) = -\gamma x + 1$ $(-\gamma > 0)$, Fortsetzung der Lösung $\tilde{g}|_{]0,\infty[} = 1$ von (GS1), was nach **B**, unmöglich ist.

Im Fall b) führte die Betrachtung von $\tilde{g}$ zusammen mit **D**. c) zu einem Widerspruch, da sonst die Lösung $\bar{g}|_{[0,\infty[}$ mit $\bar{g}|_{[0,\infty[}(x) = 1 - \bar{\gamma}x$ $(-\bar{\gamma} < 0)$ von (GS1) die Fortsetzung $\tilde{g}$ mit

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 1 - \gamma x \ (\gamma > 0), & -1/\gamma \le x \le 0 \\ 0, & x \le -1/\gamma, \end{cases}$$

hätte.

Ähnlich im Fall c). Dann hätte nämlich $\bar{g}|_{[0,\infty[}$, mit

$$\bar{g}|_{[0,\infty[}(x) = 1 - \bar{\gamma}x \ (-\gamma > 0), \quad 0 \le x \le -1/\bar{\gamma},$$

eine Fortsetzung $\tilde{g}$ der Form

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 1 - \gamma x \ (\gamma < 0), & 1/\gamma \le x \le 0 \\ 0, & x \le 1/\gamma, \end{cases}$$

was nach **D**. d) nicht sein kann.

Schließlich bleibt

d) $g(x) = \bar{\gamma}x + 1$ $(\bar{\gamma} < 0)$, $\quad x \le 0$.

Dann schließt man, wie in **C.**, daß $\gamma = \bar{\gamma}$, also $g(x) = \gamma x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, was tatsächlich Lösung von (GS) ist.

Zusammenfassend erhalten wir also folgendes bekannte Resultat wieder.

Satz. *Die stetigen Lösungen g von (GS) sind gegeben durch*

a) $g = 0$,
b) $g(x) = \gamma x + 1, \quad \gamma \in \mathbb{R}$,

c) $g(x) = \begin{cases} \gamma x + 1, & x \leq -1/\gamma \\ 0, & x \geq -1/\gamma, \end{cases} \quad \gamma < 0,$

d) $g(x) = \begin{cases} \gamma x + 1, & x \geq -1/\gamma \\ 0, & x \leq -1/\gamma, \end{cases} \quad \gamma > 0.$ ■

Literatur

[1] Aczél, J.: Lectures on functional equations and their applications. Academic Press, New York-London, 1966.

[2] Aczél, J., Schwaiger J.: Continuous solutions of the Gołąb-Schinzel equation on the nonnegative reals and on related domains. Österr. Akad. Wiss. Math.-Naturw. Kl. Sitzungsber, II. **208**, 171–177 (1999).

[3] Gołąb, St., Schinzel, A.: Sur l'équation fonctionelle $f(x + yf(x)) = f(x)f(y)$. Publ. Math. Debrecen **6**, 113–125 (1960).

[4] Reich, L.: Über die stetigen Lösungen der Gołąb-Schinzel-Gleichung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Österr. Akad. Wiss. Math.-Naturw. Kl. Sitzungsber. II. **208**, 165–170 (1999).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Ludwig Reich, Institut für Mathematik, Universität Graz, Heinrichstr. 36, A-8010 Graz.